APROXIMACIÓN A LA CATENARIA POR MEDIO DE LA PARÁBOLA

Procedimientos de construcción. Prof. Víctor Yepes

Es habitual, con cables bien tensados y con poca flecha, simplificar, a efectos de cálculo, la ecuación de la catenaria. En particular, para relaciones entre flecha y luz comprendidas entre:

$$\frac{1}{20} \leq \frac{flecha}{luz} \leq \frac{1}{5}$$

Recordando que una función puede desarrollarse en serie de Mclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(x) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(x) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x) + \cdots$$

Se puede desarrollar la ecuación de la catenaria

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$$

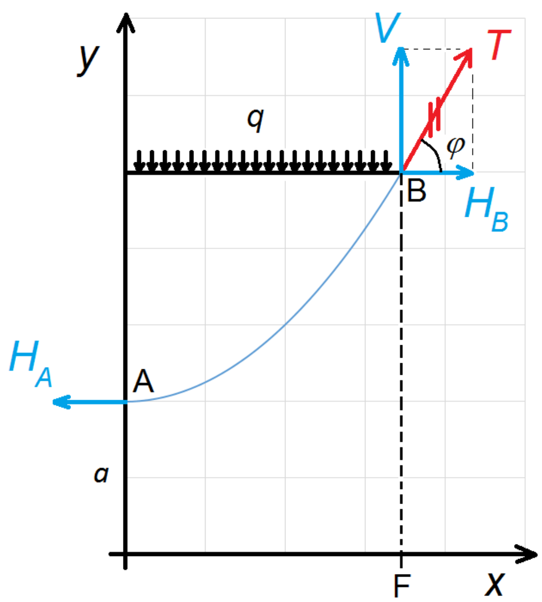
en serie de Mclaurin,

$$y = a \cdot \left(1 + \frac{x^2}{a^2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{a^4 \cdot 4!} + \cdots\right)$$

Como la magnitud de *a* es en la práctica muy grande respecto de *x*, en zonas no muy alejadas del origen, los dos primeros términos pueden ser suficientes para aproximar la ecuación de la catenaria. De este modo, obtenemos una parábola:

$$y = a \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2 \cdot a^2}\right)$$

Esta es la ecuación de un hilo infinitamente flexible sometido a una sobrecarga uniforme *q* horizontal, tal y como vamos a comprobar seguidamente.



En efecto, por equilibrio estático de fuerzas (ver figura),

$$H_A = H_B = H$$

$$V = q \cdot x$$

Tomando momentos en F, resulta

$$H_B \cdot y - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

Si descomponemos *H* en un producto de factores,

$$H = q \cdot b$$

Entonces,

$$q \cdot b \cdot y = q \cdot \frac{x^2}{2} \rightarrow y = \frac{x^2}{2 \cdot b}$$

es decir, la expresión de una parábola.

Tomando momentos respecto a B,

$$H_A \cdot (y - a) - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

Luego deducimos que, también en la parábola, la componente horizontal de la tensión es constante:

$$H_A = q \cdot \frac{x^2}{2 \cdot (y - a)} = q \cdot \frac{x^2}{2 \cdot \frac{x^2}{2 \cdot a}} = q \cdot a$$

Es decir, que las componentes de la tensión en un punto cualquiera serán:

$$H = q \cdot a$$

$$V = q \cdot x$$

También podríamos desarrollar el arco. En efecto, como

$$s = a \cdot \tan \varphi$$

Desarrollando en serie

$$s = a \cdot \left[\frac{x}{a} + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{1}{5!} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^5 + \cdots\right]$$

Tomando solo los dos primeros términos,

$$s = a \cdot \left[\frac{x}{a} + \frac{x^3}{6 \cdot a^3}\right] = x \cdot \left[1 + \frac{x^2}{6 \cdot a^2}\right]$$

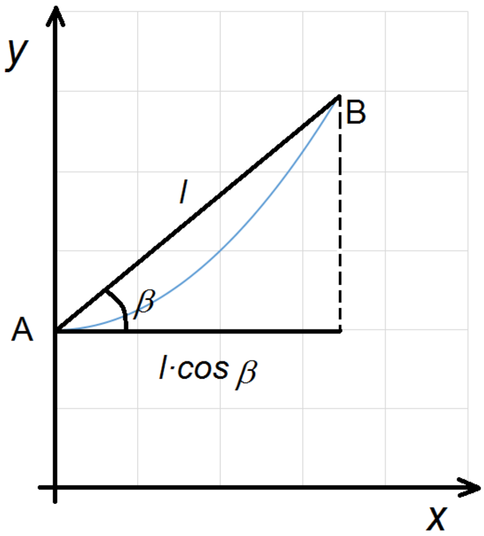
Se podría abordar el cálculo de catenarias a base de parábolas (cables bien tensados y poca flecha) sustituyendo el peso por unidad de longitud del cable *p* por una sobrecarga uniforme horizontal equivalente *q*.

En un tramo suficientemente pequeño de cable, se puede sustituir la longitud de la catenaria por la cuerda que une los dos puntos A y B. Al igualar los pesos,

$$l \cdot p = q \cdot l \cdot \cos\beta$$

Y por tanto, la sobrecarga uniforme horizontal equivalente valdría:

$$q = \frac{p}{\cos\beta}$$



Por tanto, cuando tenemos dos puntos, A y B, y se sustituye la catenaria por una parábola, la cuerda entre ambos puntos se toma como longitud de la catenaria. La mayoría de los cálculos se hacen a base de parábolas con esta simplificación y aprovechando las propiedades de la catenaria.