

INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN
HEURÍSTICA EN INGENIERÍA

Víctor Yepes Piqueras, Ph.D.
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Profesor Titular de Universidad

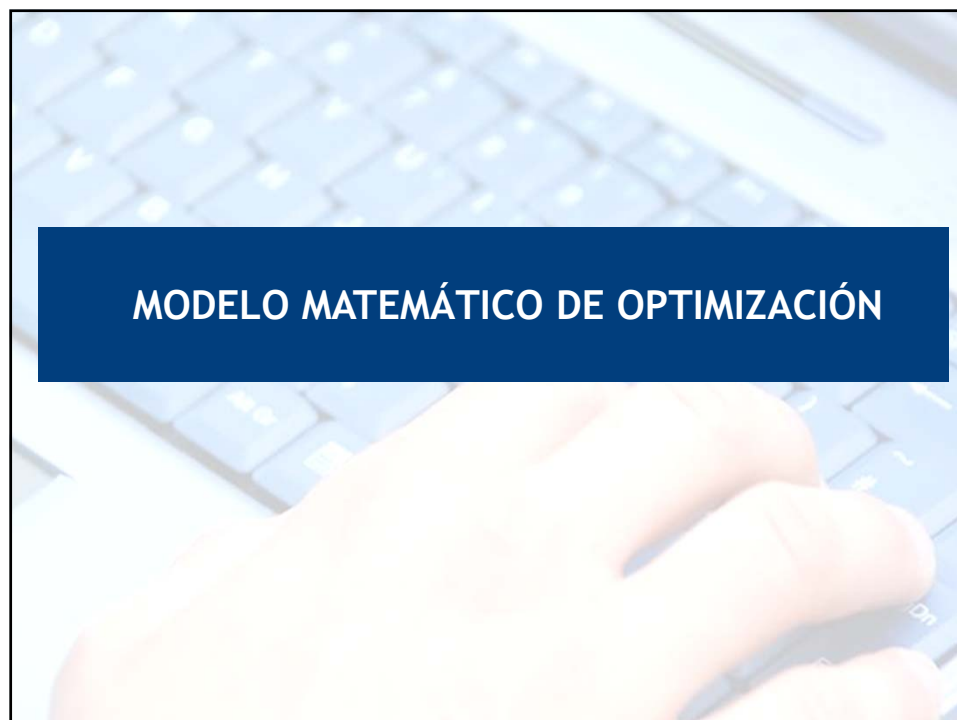
<http://victoryepes.blogs.upv.es/>
 @vyepesp



 UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

 ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

 PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

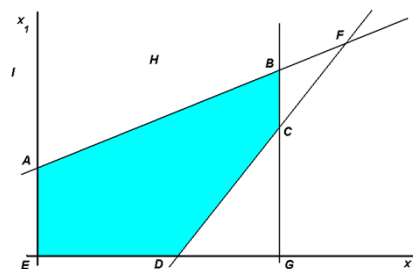


Objetivos

1. Entender la dificultad que entraña modelizar la realidad
2. Conocer la estructura de un modelo matemático de optimización
3. Distinguir los distintos tipos de modelos matemáticos

Contenido

1. La modelización
2. Estructura de un modelo matemático
3. Clasificación de los modelos matemáticos



1. La modelización

La **realidad** es difícil de copiar de forma exacta

- Gran complejidad
- Parte de su complejidad es irrelevante para el problema

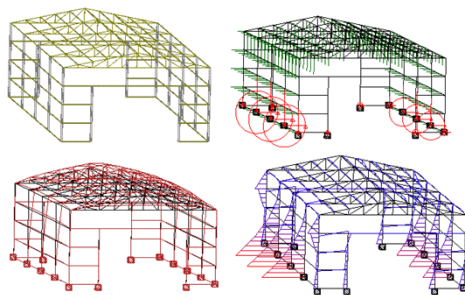
La representación y simplificación son **difíciles** de conjugar en la práctica

- Ni tan simple que no represente al problema
- Ni tan complejo que impida destacar las relaciones básicas

La modelización

Modelo:

- Abstracción o representación simplificada de una parte o segmento de la realidad



La modelización

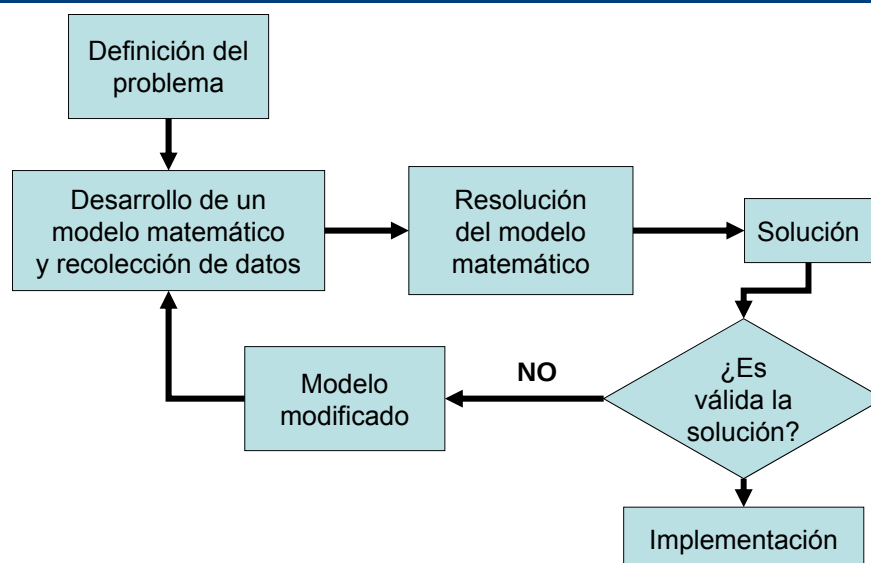
El **proceso de modelización** comienza identificando y determinando los límites del problema y continúa con la construcción del propio modelo

Dependiendo del grado de abstracción, hay diferentes tipos:

- A escala
- Lógicos
- Matemáticos



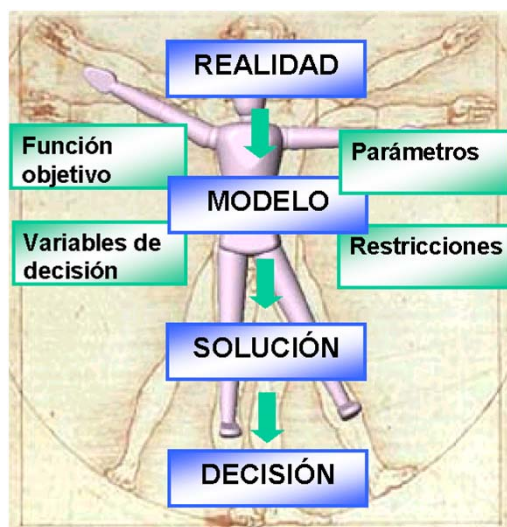
La modelización



Estructura de un modelo matemático

- a) Determinación de las **componentes** del modelo (variables de decisión o control, resultados, parámetros)
- b) Determinación de la **estructura** (expresiones matemáticas que relacionan las variables)
- c) Determinación de un **principio de elección** (optimización, satisfacción, suboptimización...)
- d) Generación de **alternativas, decisiones o cursos de acción** entre los que puede elegir el decisor, y predicción y medición de los resultados de éstas
- e) Elección de un **escenario**, es decir, una descripción o establecimiento de suposiciones bajo las que se examinan las situaciones de decisión

Estructura de un modelo matemático



Estructura de un modelo matemático

Variable de decisión

- Cantidad cuyo valor se puede controlar y es necesario para determinar un problema de decisión

Parámetro

- Información conocida en un problema de decisión. También se llama constante o dato

Restricción

- Limitación sobre los valores de las variables en un modelo matemático

Estructura un modelo matemático

Modelo matemático de optimización

- Problema de elegir los valores de las variables de decisión de forma que se maximice (minimice) la función objetivo, sujeta a las restricciones dadas

Función objetivo

- Objetivo global de un problema de decisión expresado en forma matemática en términos de los datos y de las variables
- En ocasiones se trata de optimizar varias funciones objetivo de forma simultánea

Estructura de un modelo matemático

Análisis de sensibilidad

- Averiguar cómo cambiaría la solución ante el cambio en los valores de los parámetros
- Necesario debido a la frecuente incertidumbre sobre el valor real de los parámetros

Validación de la solución

- Proceso de revisar una solución de un modelo matemático para asegurar que los valores tengan sentido y que las decisiones resultantes puedan llevarse a cabo

Estructura de un modelo matemático

Optimizar $f(\vec{x})$

sujeto a (s.a.)

$$\vec{x} \in X \subseteq \Omega$$

donde:

$\vec{x}$ representa una **solución**

$f(\vec{x})$ es la evaluación de una **función objetivo** arbitraria, f , de acuerdo con $\vec{x}$

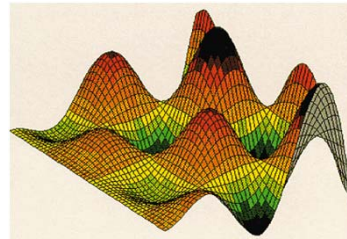
X es el **espacio factible** de soluciones

Ω es el **espacio posible**

Estructura de un modelo matemático

El universo de todas las posibles soluciones de un problema puede concebirse como un paisaje imaginario, compuesto por cimas y valles

En el caso de maximizar la función objetivo, los valles corresponderían a las peores soluciones, mientras las cimas ocuparían los óptimos locales, siendo la cima más alta el óptimo global (pueden haber varios)



Clasificación de los modelos matemáticos

¿Es el problema **determinístico** o **estocástico**?

- Si todos los datos se conocen con certeza, el problema es determinístico

¿El problema determinístico es **restringido** o no?

¿Tiene el problema determinístico restricciones **lineales** o **no lineales**?

- Si todas las restricciones pueden expresarse como una suma o diferencia de constantes conocidas multiplicadas por una variable simple, las restricciones son lineales

¿Tiene el problema determinístico una función objetivo **lineal** o **no lineal**?

¿Tiene el problema determinístico variables **enteras** (números completos) o **continuas**?

Conclusiones

1. Cualquier modelo que intente representar la realidad siempre va a simplificarla
2. La modelización matemática requiere optimizar una o varias funciones objetivo
3. La solución de un problema de optimización debe validarse antes de tomar una decisión
4. Existen distintos tipos de modelos matemáticos en función de las características de las variables, de las restricciones y de la función objetivo



OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA

Objetivos

1. Comprender la esencia de un problema de optimización combinatoria
2. Conocer los dos grandes enfoques para abordarlos
3. Reconocer algunos problemas combinatorios habituales

Contenido

1. La optimización combinatoria
2. Algoritmos de resolución
3. Algunos problemas combinatorios

7				3		2
	4				1	9
	5	2		9		
2			1	5		7
	9		4	7		8
			7		4	8
3	2				5	
9		3				1

La optimización combinatoria

Objetivo: encontrar el máximo (o el mínimo) para una determinada función sobre un conjunto finito de soluciones $\mathcal{D}$

- Dada la finitud de $\mathcal{D}$, las variables han de ser discretas
- No se exige ninguna condición o propiedad sobre la función objetivo o la definición del conjunto $\mathcal{D}$

La optimización combinatoria

$$\begin{array}{l} \max f(\vec{x}) \\ \text{tal que } \vec{x} \in D \end{array}$$

- $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ variables del problema
- $f(\vec{x})$ función objetivo
- Para todo i , $x_i \in D_i$ dominio de la variable, que es un conjunto discreto (finito o infinito)
- $X = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ espacio de soluciones (discreto)
- $D \subseteq X$ espacio de soluciones factibles

La optimización combinatoria

¿Qué tienen en **común** estos problemas?

- A veces es difícil encontrar una solución factible
- Paralelamente, existe un número muy elevado de soluciones posibles
- De todas las soluciones, alguna es la “óptima”

La optimización combinatoria

Es la rama de la optimización en matemáticas aplicadas y en ciencias de la computación, relacionada con la investigación operativa, teoría de algoritmos y teoría de la complejidad computacional

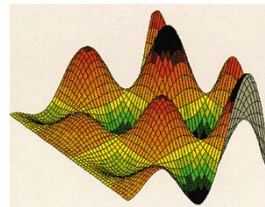
Optimización combinatoria:

"contiene los dos elementos que hacen atractivo un problema a los matemáticos: planteamiento sencillo y dificultad de resolución" (Garfinkel, 1985)

Algoritmos de resolución

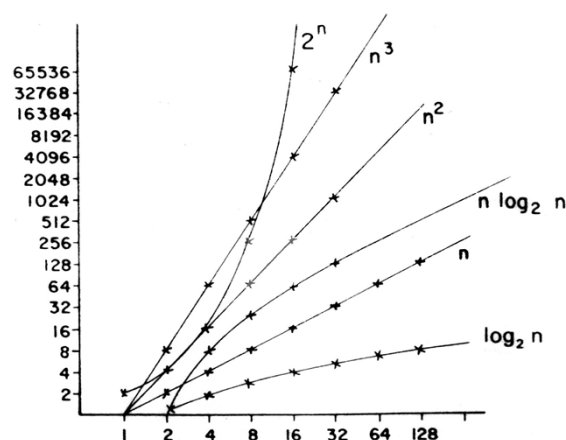
Podemos emplear algoritmos:

- **EXACTOS:** son capaces de localizar la solución óptima, aquella en la que la función objetivo alcanza su valor extremo
- **HEURÍSTICOS:** encuentran una buena solución, pero sin garantizar que sea la óptima



Algoritmos de resolución

Orden de magnitud de un algoritmo

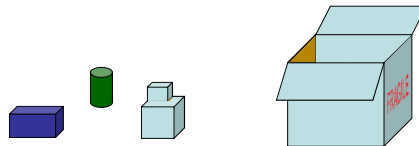


Algunos problemas combinatorios

Problema de la mochila:

- Seleccionar de entre un conjunto de n productos, cada uno con un valor c_i y un volumen v_i , aquellos que quepan en un recipiente con volumen V , y que tengan el mayor valor posible.
- El número de subconjuntos posible del conjunto $\{1 \dots n\}$ es 2^n .

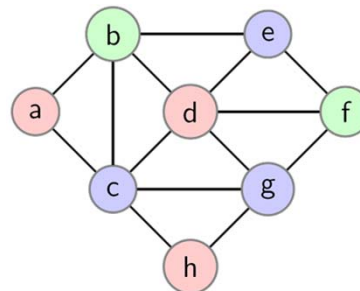
$$\begin{aligned} \max \quad & \sum c_i v_i \\ \text{s.a: } & \sum v_i \leq V \end{aligned}$$



Algunos problemas combinatorios

Problema de coloración mínima:

- Asignación a cada vértice de un color (un entero positivo) tal que dos vértices adyacentes no tienen el mismo color asignado.
- Consiste en determinar un coloreo con un mínimo número de colores

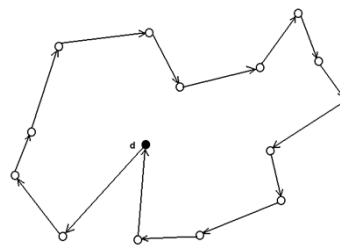


Algunos problemas combinatorios

Problema del viajante de comercio (*travelling salesman problem*):

- Consideremos un viajante que tiene que visitar cada una de n ciudades una sola vez, regresando a la ciudad de origen. ¿En qué orden deben visitarse para que la distancia sea mínima?
- El número de soluciones posible es de $(n-1)!/2$.

O	A	B	C	O
O	A	C	B	O
O	B	A	C	O
O	B	C	A	O
O	C	A	B	O
O	C	B	A	O



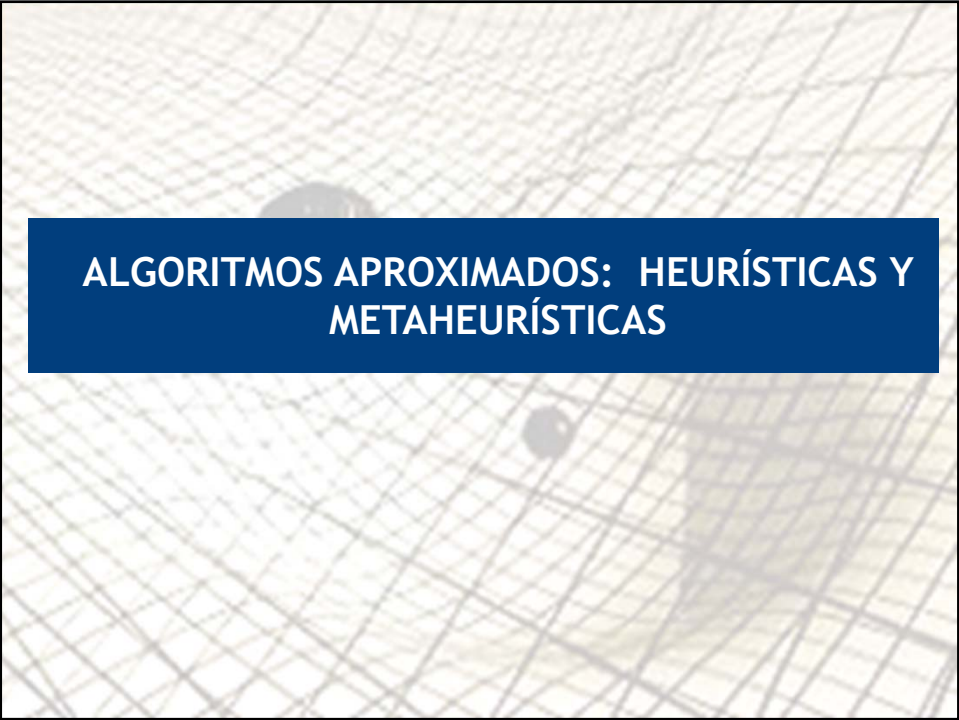
Algunos problemas combinatorios

Explosión combinatoria



Conclusiones

1. Muchos problemas de optimización son combinatorios
2. Son problemas de planteamiento sencillo pero difíciles de resolver
3. El número de posibles soluciones crece exponencialmente con las variables
4. Los algoritmos heurísticos permiten obtener buenas soluciones en tiempos razonables



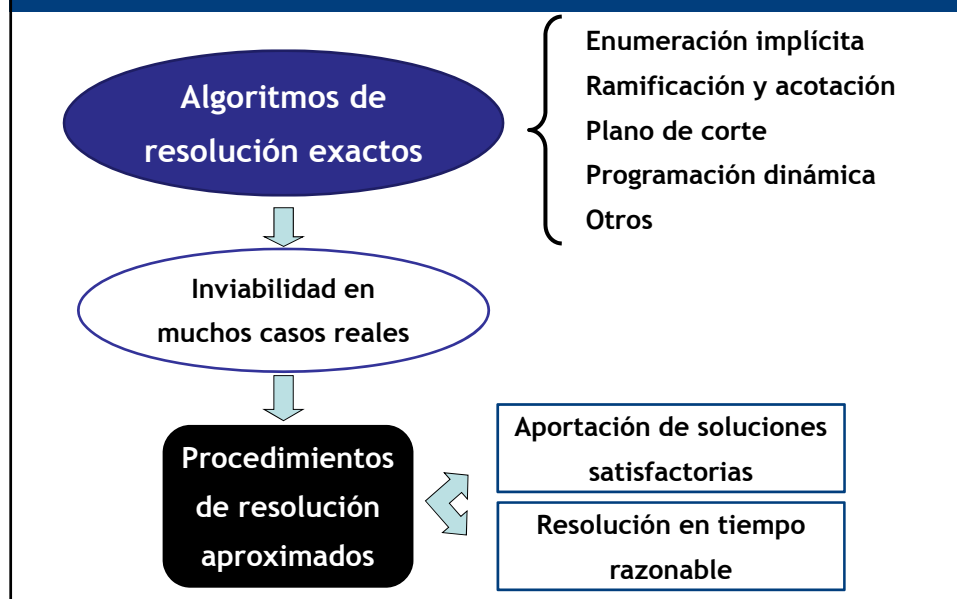
**ALGORITMOS APROXIMADOS: HEURÍSTICAS Y
METAHEURÍSTICAS**

Algoritmos de resolución

Lo que el mundo real demanda

- Existen problemas que no pueden resolverse usando un algoritmo que requiere tiempo polinomial.
- De hecho, en muchas aplicaciones prácticas, no podemos siquiera decir si existe una solución eficiente.
- Hay muchos problemas para los cuales el mejor algoritmo que se conoce requiere tiempo exponencial.

Algoritmos de resolución



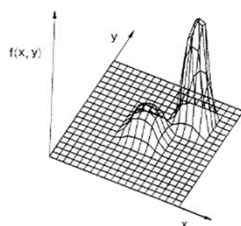
Técnicas heurísticas

¿Qué es una heurística?

- La palabra *heurística* se deriva del griego *heuriskein*, que significa "encontrar" o "descubrir".
- El significado del término ha variado históricamente.
- Algunos han usado el término como un antónimo de "algorítmico".
 - Por ejemplo, Newell *et al.* dicen: "*a un proceso que puede resolver un cierto problema, pero que no ofrece ninguna garantía de lograrlo, se le denomina una 'heurística' para ese problema*"

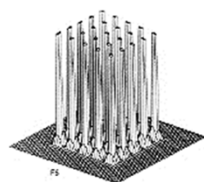
Técnicas heurísticas

Heurísticas



- ▶ Procedimientos sencillos
- ▶ Algoritmos específicos
- ▶ "tailored algorithms" (Telfar, 1994)
- ▶ Flexibilidad en el manejo de las características propias del problema
- ▶ Éxito regla 80/20 (Ho, 1994)

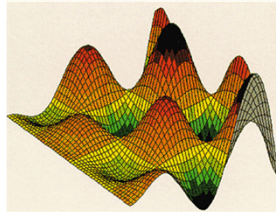
Metaheurísticas



- ▶ Término acuñado por Glover (1986)
- ▶ Métodos generales (Osman *et al.*, 1996)
- ▶ Emulan estrategias eficientes en la Naturaleza e inteligencia artificial
- ▶ Guían procedimientos específicos
- ▶ Sistemas inteligentes (Goonatilake *et al.*, 1995)

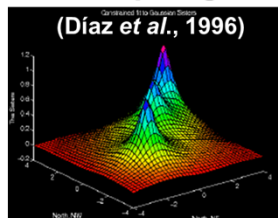
Técnicas heurísticas

Condicionantes



- No existe método exacto
- Innecesaria la mejor solución
- Datos poco fiables
- Modelo fuertemente simplificado
- Limitaciones de tiempo de cálculo,
- Paso intermedio a otro método

Tipología



- Construcción soluciones factibles
- Descomposición
- Reducción
- Manipulación del modelo
- Búsqueda local

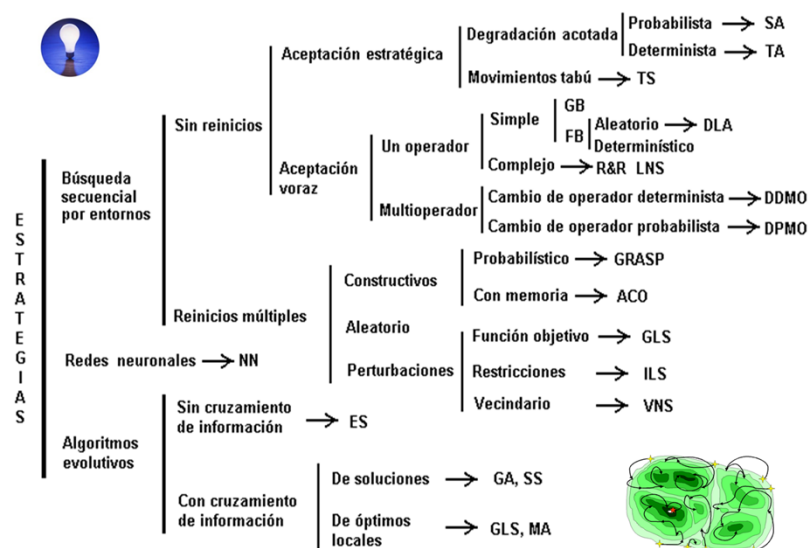
Técnicas heurísticas

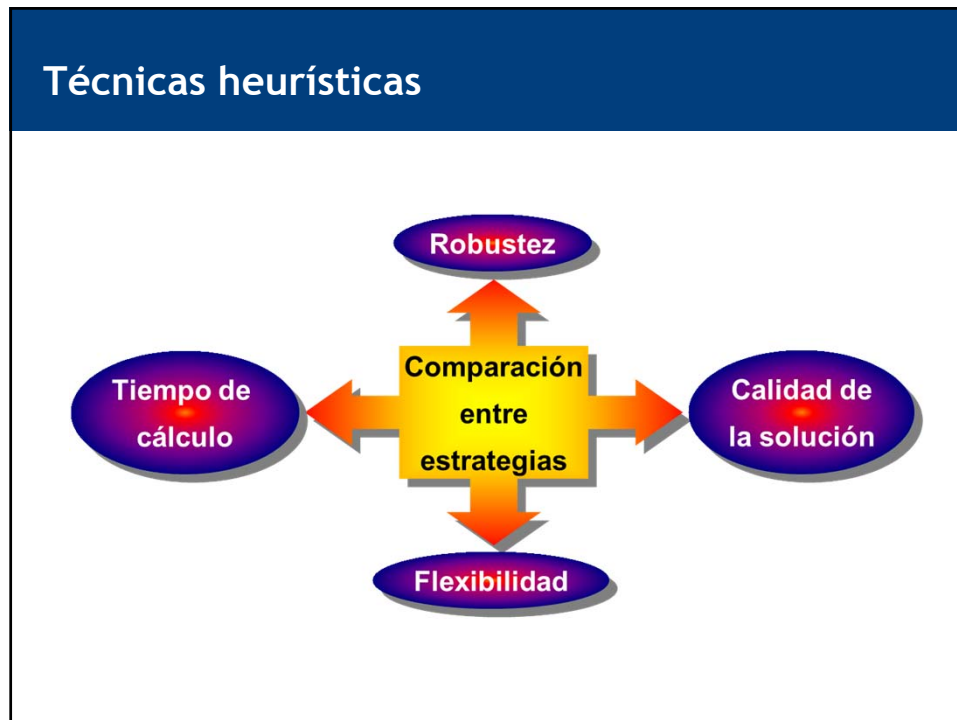
- Principales ventajas de las heurísticas:
 - Simples de entender y fáciles de implementar
 - Ahorran tiempo de formulación y de computación
 - A menudo producen soluciones aceptables
- Principal limitación:
 - No garantiza la solución óptima

Técnicas heurísticas



Técnicas heurísticas





Objetivos

1. Entender cómo se puede abordar la optimización heurística de las estructuras de hormigón armado y pretensado
2. Presentar ejemplos de aplicación
3. Comprender las decisiones que han de adoptarse durante la optimización

Contenido

1. Las heurísticas de búsqueda local
2. Codificación de una estructura
3. Comprobación de las restricciones
4. Valoración de la función objetivo
5. Transformación o movimiento
6. Toma de decisiones en la optimización

Las heurísticas de búsqueda local

Problema de optimización condicionada:

minimizar $F(\vec{X}) = \sum c_i \cdot m_i(\vec{X})$

$\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$

$\vec{P} = (p_1, \dots, p_m)$

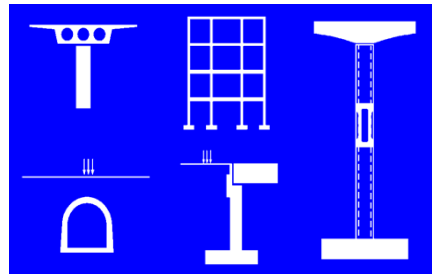
sujeto a: $g_i(\vec{X}, \vec{P}) \leq 0 \quad i=1, \dots, k$

función objetivo

variables de diseño

parámetros

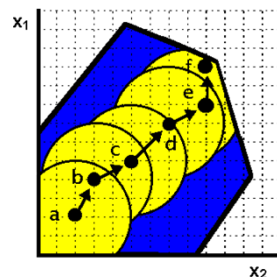
restricciones



Las heurísticas de búsqueda local

Movimiento, operación o transformación:

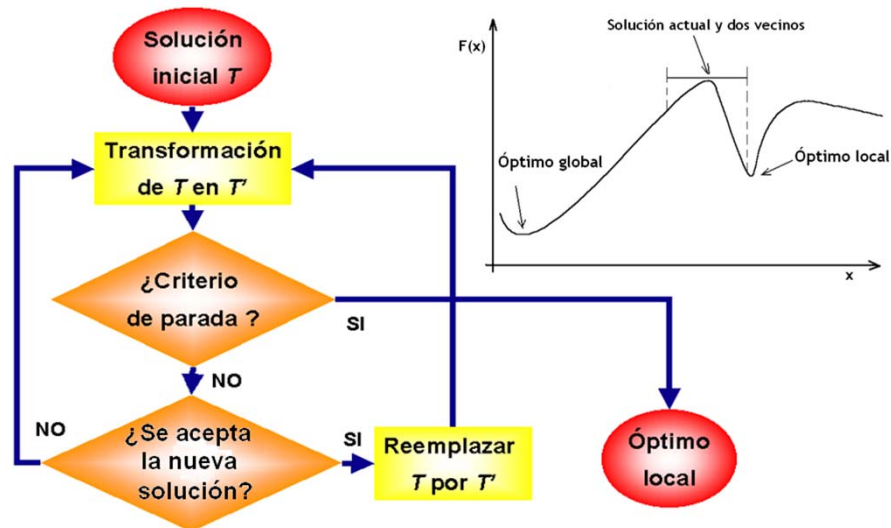
- Modificación de una solución a otra mediante una regla determinada



Entorno o vecindario:

- Soluciones a las cuales se puede llegar mediante un movimiento

Las heurísticas de búsqueda local



Las heurísticas de búsqueda local

Codificación de la solución

Módulo de comprobación de restricciones

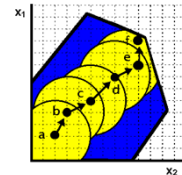
Módulo de valoración de la función objetivo

Toma de decisiones

Las heurísticas de búsqueda local

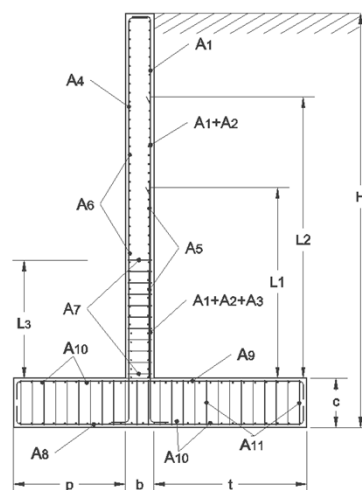
Algunos **algoritmos heurísticos** basados en la búsqueda secuencial por entornos:

- Búsqueda de máximo gradiente (*hill climbing search*)
- Búsqueda local multiarranque (*multi-start local search*)
- Recocido simulado (*simulated annealing*)
- Aceptación por umbrales (*threshold accepting*)
- Búsqueda en entornos variables (*variable neighborhood search*)
- Búsqueda en grandes entornos (*large neighborhood search*)
- Búsqueda tabú (*tabu search*)
- Búsqueda local iterada (*iterated local search*)
- Búsqueda local guiada (*guided local search*)



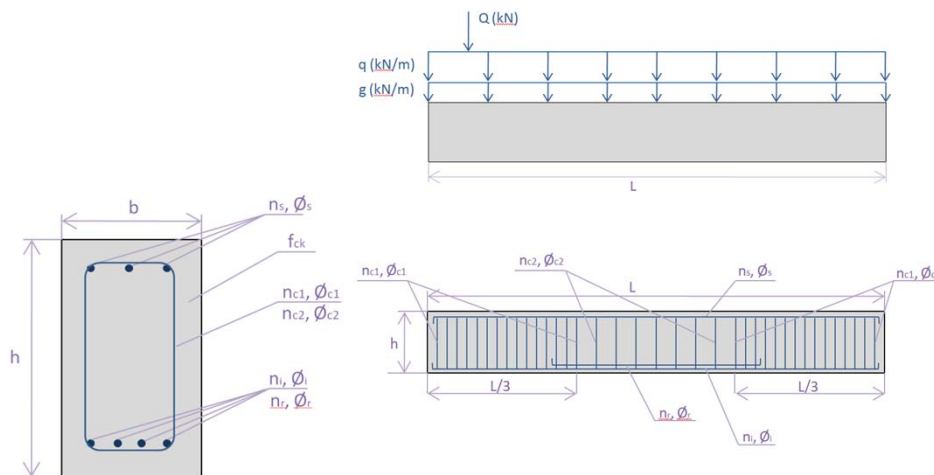
Codificación de una estructura

x1	x2	x3	x4	x5	x6	...	xn
x1,1	x2,1	x3,1	x4,1	x5,1	x6,1		xn,1
x1,2	x2,2	x3,2	x4,2	x5,2	x6,2		xn,2
x1,3	x2,3	x3,3	x4,3	x5,3	x6,3		xn,3
x1,4		x3,4	x4,4	x5,4	x6,4		.
x1,5		x3,5	x4,5	x5,5	x6,5		.
x1,6		x3,6	x4,6	x5,6	x6,6		.
x1,7		x3,7		x5,7	x6,7		xn,m
		x3,8		x5,8	x6,8		
		x3,9			x6,9		
		x3,10			x6,10		
					x6,11		
					x6,12		



Codificación de una estructura

Viga isostática de hormigón armado



Codificación de una estructura

Canto (54)	Ancho (71)	Armadura inferior Nº barras (11)	Armadura inferior Φ barras (8)	Arm. cort. apoyos Nº cerros/m (7)	Arm. cort. apoyos Φ barras (8)	Acero MPa (2)	Hormigón Mpa (16)
0,30	0,30	2	6	4	6	400	25
0,35	0,35	3	8	5	8	500	30
0,40	0,40	4	10	6	10		35
0,45	0,45	5	12	7	12		40
0,50	0,50	6	16	8	16		45
0,55	0,55	7	20	9	20		50
0,60	0,60	8	25	10	25		55
0,65	0,65	9	32		32		60
...	...	10					...
2,95	3,95	11					95
3,00	4,00	12					100

$$N = 54 \cdot 71 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 16 = 5.44 \cdot 10^9$$

(los segundos de más de 172 años)

Comprobación de las restricciones

MÓDULO DE COMPROBACIÓN

Estados Límite Últimos:

- E. L. de Equilibrio
- E. L. de Agotamiento frente a solicitaciones normales
- E. L. de Inestabilidad
- E. L. de Agotamiento frente a cortante
- E. L. de Agotamiento por torsión
- E. L. de Agotamiento frente a punzonamiento
- E. L. de Agotamiento por esfuerzo rasante en juntas entre hormigones
- E. L. de Fatiga

Estados Límite de Servicio:

- E. L. de Fisuración
- E. L. de Deformación
- E. L. de Vibraciones

Estado Límite de Durabilidad

Restricciones geométricas

Condiciones de diseño

Solución factible

Solución infactible

Valoración de la función objetivo

Coste económico, C :

$$C = \sum p_i \cdot m_i$$

p_i : precio unitario

m_i : medición

Emisiones de CO₂

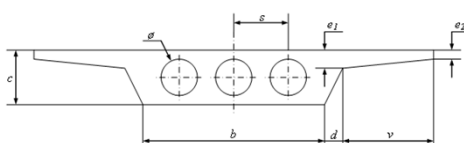
Huella ecológica

Energía consumida

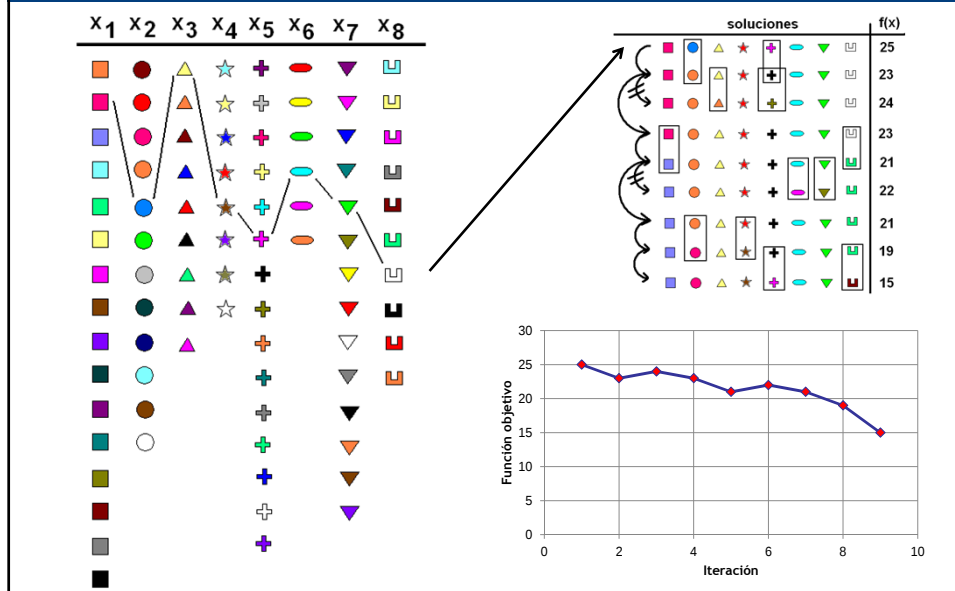
Seguridad global

Constructibilidad

Unidad	Coste
Armadura activa	5,890 €/kg
Armadura pasiva	0,590 €/kg
HP-35	68,612 €/m ³
HP-40	79,320 €/m ³
HP-45	81,254 €/m ³
HP-50	96,770 €/m ³
Aligeramiento	68,612 €/m ³
Cimbra	10,120 €/m ³
Encofrado	41,930 €/m ²



Transformación o movimiento



Toma de decisiones en la optimización

- Elegir la estrategia de selección: primera mejor solución o la mejor del entorno (*first best* vs. *global best*)
- Decidir si permitimos empeorar la solución actual (*descent local search* vs. *hill-climbing*)
- Determinar el criterio de parada (tiempo de cálculo, nº de iteraciones, no encontrar mejoras, etc.)
- Ajustar los mejores parámetros de búsqueda para una heurística determinada (óptimo de Pareto, prueba y error, etc.)
- Determinar cuantas veces hay que repetir la heurística (teoría del valor extremo, criterios estadísticos, etc.)

Conclusiones

1. Por razones constructivas, la optimización del hormigón estructural es de tipo combinatorio
2. Los elementos clave para una buena optimización son la codificación de la estructura y la definición del movimiento
3. El esfuerzo de computación más importante recae en la comprobación de los estados límite
4. El éxito de la optimización recae en las decisiones que tomemos respecto a la heurística, especialmente el ajuste de los parámetros de búsqueda



OPTIMIZACIÓN HEURÍSTICA MEDIANTE CRISTALIZACIÓN SIMULADA

Objetivos

1. Aprender que se pueden emular procesos existentes en la Naturaleza para optimizar problemas complejos
2. Programar el código necesario para desarrollar un algoritmo de SA
3. Distinguir la influencia de los parámetros de los que depende SA

Contenido

1. La cristalización simulada

- Descripción del algoritmo
- Ventajas e inconvenientes

2. Ejemplos de aplicación



Cristalización simulada

Annealing → recocido

- Baño térmico para obtener estados de baja energía en un sólido
- Enfriamiento muy lento → las partículas se recolocan en el estado de mínima energía
- **Simulated annealing (SA)**
 - Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi (1983)
 - Cerny (1985)



Cristalización simulada

TERMODINÁMICA	OPTIMIZACIÓN
Configuración	Solución factible
Configuración fundamental	Solución óptima
Energía de la configuración	Coste de la solución
Temperatura	Parámetro de control

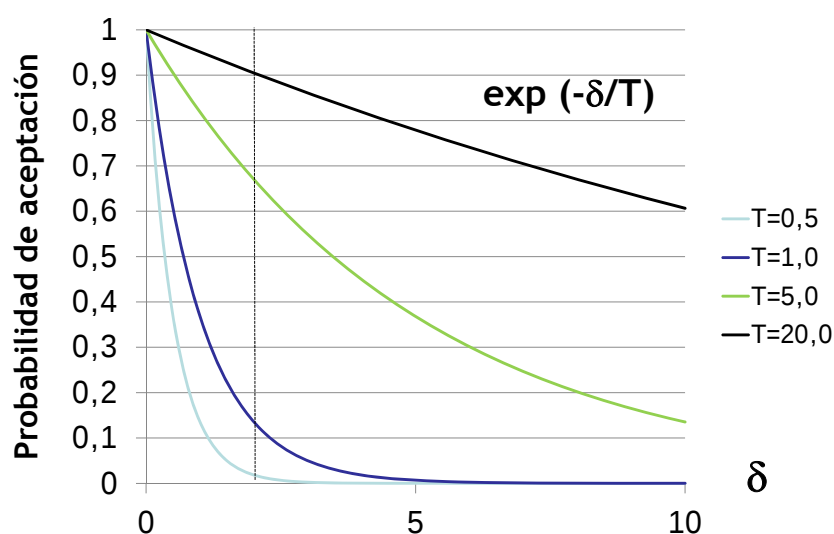
Cristalización simulada

Algoritmo de **búsqueda por entornos**

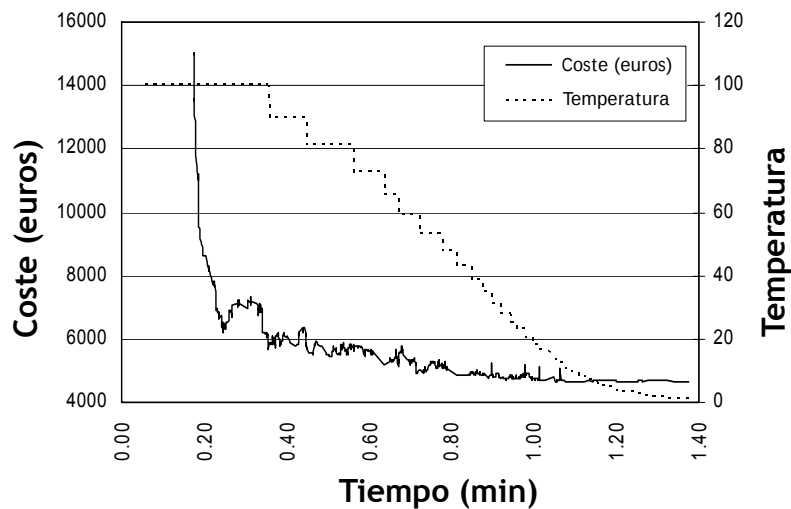
- Selecciona candidatos aleatoriamente
- Admite **soluciones degradadas** con una probabilidad función de:
 - Temperatura: T
 - Diferencia entre la valoración de las funciones objetivo δ

(distribución de Boltzman: $\exp(-\delta/T)$)

Cristalización simulada



Cristalización simulada



Cristalización simulada

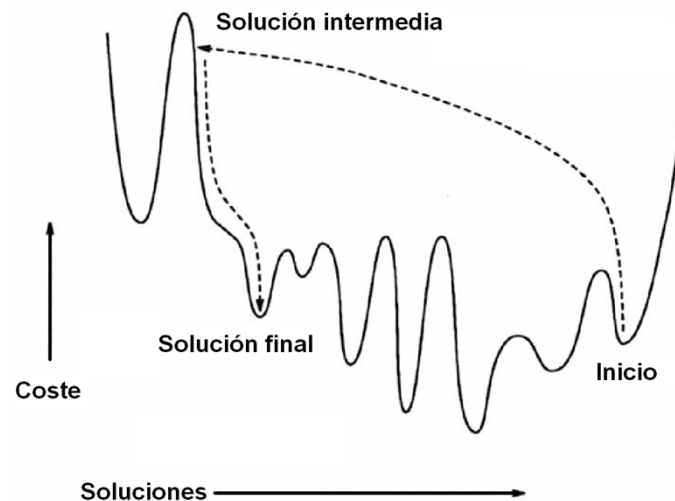
Algoritmo simplificado

```

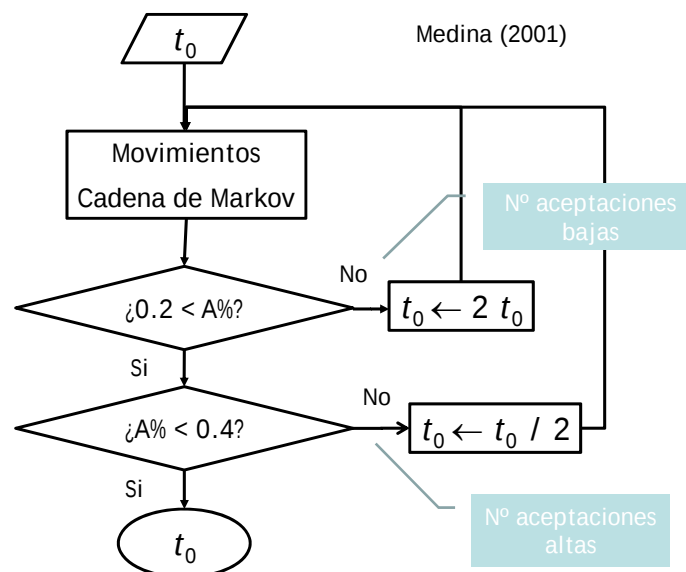
INPUT ( $T_o, \alpha, L, T_f$ )
 $T \leftarrow T_o$ 
 $S_{act} \leftarrow \text{Genera\_solucion\_inicial}$ 
WHILE  $T \geq T_f$  DO
  BEGIN
    FOR  $cont \leftarrow 1$  TO  $L(T)$  DO
      BEGIN
         $S_{cand} \leftarrow \text{Selecciona\_solucion\_N}(S_{act})$ 
         $\delta \leftarrow \text{coste}(S_{cand}) - \text{coste}(S_{act})$ 
        IF ( $U(0,1) < e^{(-\delta/T)}$ ) OR ( $\delta < 0$ ) THEN  $S_{act} \leftarrow S_{cand}$ 
      END
    END
     $T \leftarrow \alpha(T)$ 
  END
  {Escribe como solución, la mejor de las  $S_{act}$  visitadas}

```

Selección de temperatura inicial



Selección de la temperatura inicial



Velocidad de enfriamiento

Primera aproximación

- Velocidad geométrica de decrecimiento de la temperatura para cada cadena de Markov

$$t_{i+1} = r \cdot t_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

- Se aconseja $r \in [0.8, 0.99]$
- Otra opción:
 - Longitud de la cadena de Markov dependiente de la temperatura $\rightarrow$ n° de aceptaciones constante

Temperatura final

Teóricamente $T_f=0$

- Inviabile para decrecimientos geométricos
- Probabilidad de aceptar soluciones peores es casi nula antes de llegar a $T_f=0$

Opciones para detener el algoritmo

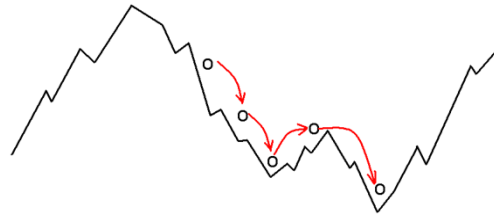
- No existan mejoras tras un número de cadenas de Markov
- Al alcanzar una fracción de la temperatura inicial (p.e. $T_f = 0.01 T_0$)

Recalentamientos decrecientes

Al llegar al óptimo local, se puede recalentar para mejorar la búsqueda

- **Símil:** bajamos una montaña por un sendero, cuando ya no podemos más, se sube un poco para otear otro itinerario

$$t_r = \max(t_{r-1} / 2, t_b) \quad r = 1, \dots, R$$



Ventajas e inconvenientes

Ventajas:

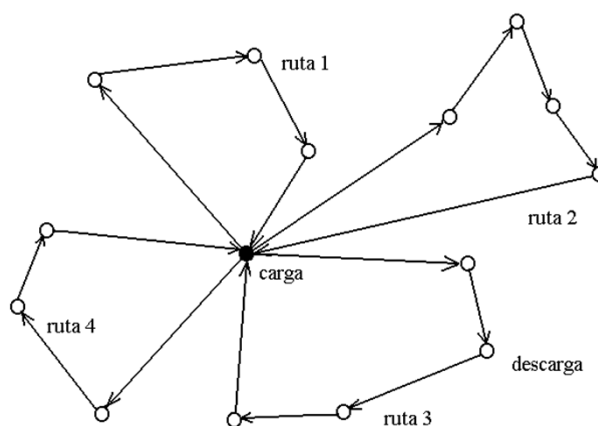
- SA versátil incluso con problemas complejos y funciones objetivo arbitrarias
- Convergencia estadística hacia la solución óptima, independientemente de la solución inicial
- SA proporciona soluciones valiosas, pero no informa de la llegada al óptimo global

Ventajas e inconvenientes

Inconvenientes:

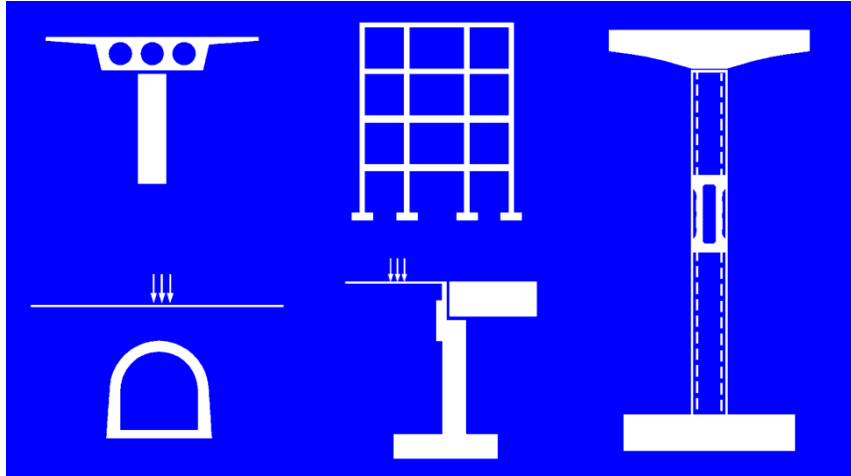
- Procedimiento general → puede no ser competitivo con otros específicos que aprovechen información adicional del problema
- Algoritmo lento, especialmente si la función objetivo es costosa en su evaluación
- SA no es recomendable en espacios de soluciones poco abruptos o con pocos óptimos locales

Ejemplos de aplicación



Optimización de rutas de vehículos

Ejemplos de aplicación



Optimización de estructuras de hormigón armado y pretensado

Conclusiones

1. Existen procesos en la Naturaleza que se pueden emular para optimizar funciones complejas
2. SA permite alcanzar buenas soluciones en tiempos razonables de cálculo
3. SA precisa de un ajuste previo de los parámetros que guían el algoritmo
4. SA es aplicable a una amplia variedad de problemas



OPTIMIZACIÓN HEURÍSTICA MEDIANTE ACEPTACIÓN POR UMBRALES

Objetivos

1. Entender cómo una heurística sencilla es capaz de optimizar problemas complejos
2. Conocer los pseudocódigos que permiten programar los algoritmos
3. Distinguir la influencia de los parámetros de los que dependen

Contenido

1. La aceptación por umbrales

2. Variantes al método

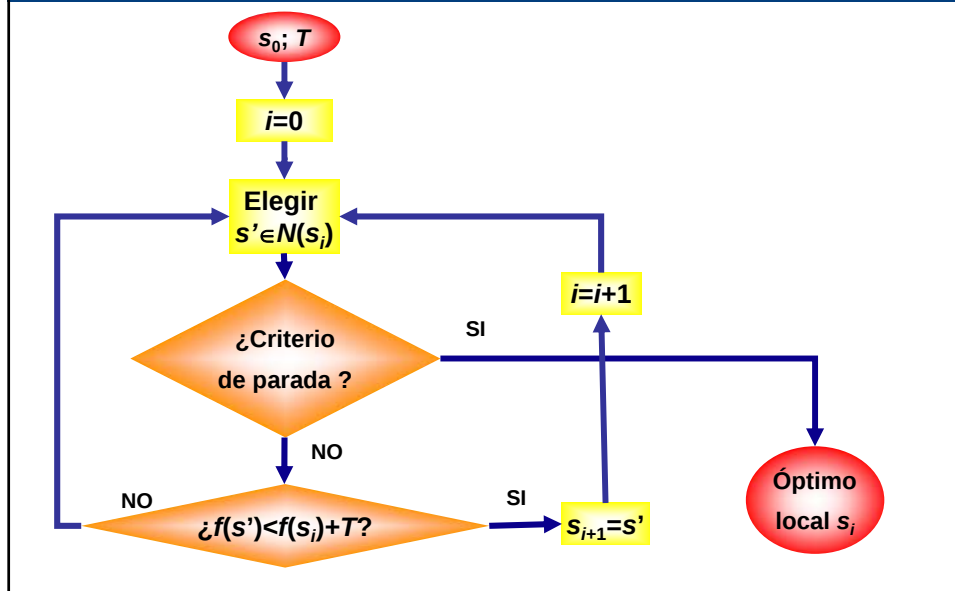
- Algoritmo del gran diluvio universal
- Algoritmo de cercanía al líder

La aceptación por umbrales

- **Threshold Accepting** fue propuesto por Deuck y Scheuer (1990)
- Variante determinista del *Simulated Annealing*
- Se autoriza el deterioro en la calidad de la solución actual siempre que la nueva solución no se exceda en cierta magnitud umbral



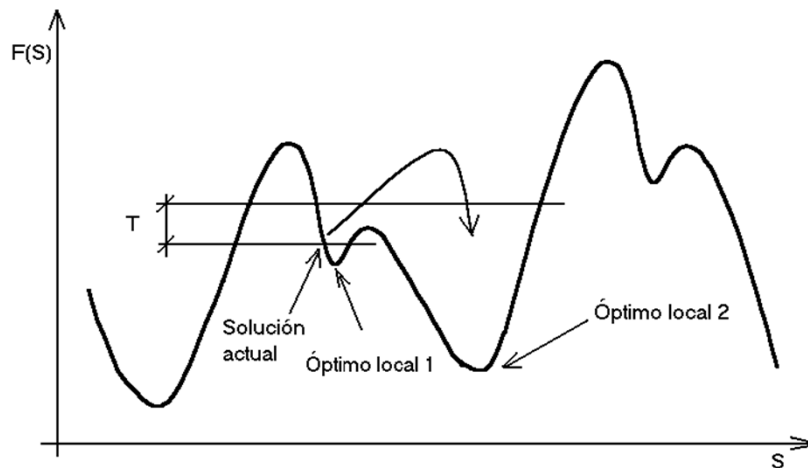
La aceptación por umbrales



La aceptación por umbrales

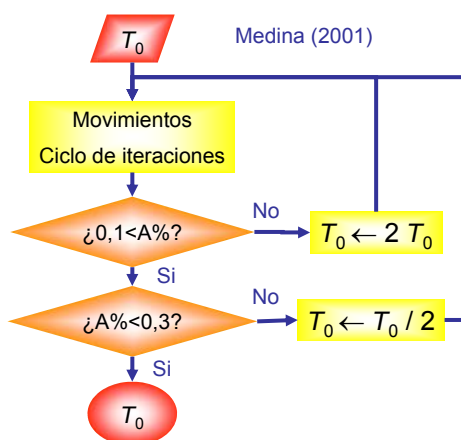
1. Seleccionar una solución inicial
2. Elegir un umbral inicial, $T > 0$
3. Buscar una solución del entorno y evaluar ΔE (incremento de la función objetivo). Si $\Delta E > -T$, aceptar el movimiento
4. Después de no conseguir ninguna mejora durante un tiempo, o tras un número de iteraciones, reducir T
5. Volver al paso 3 hasta encontrar un criterio de terminación

La aceptación por umbrales



La aceptación por umbrales

Selección umbral inicial



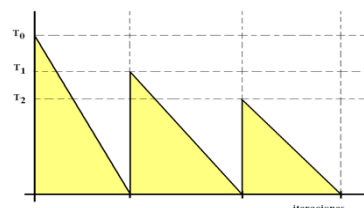
Minoración del umbral

$$T = T_0 \cdot (1 - x)$$

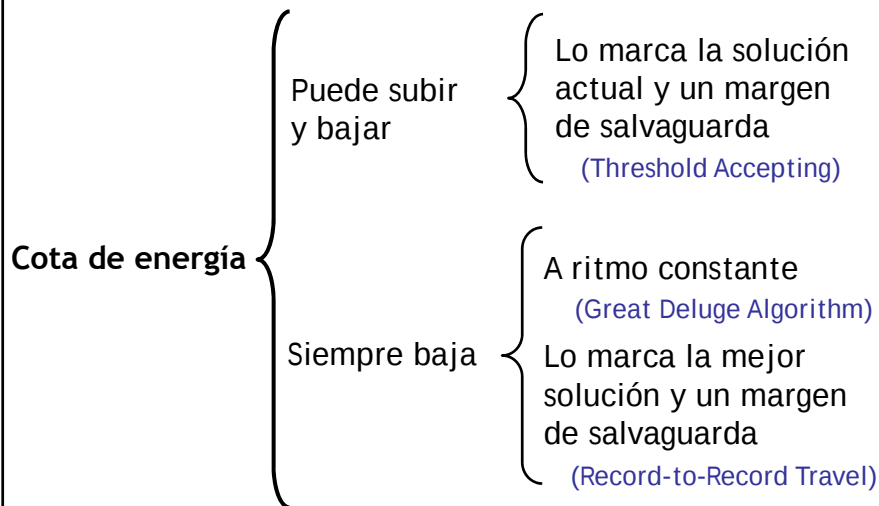
$$T = T_0 \exp(-\ln 2 \cdot x / \alpha)$$

Reducción umbral inicial en cada ciclo

$$T_0 = T'_0 \cdot k$$

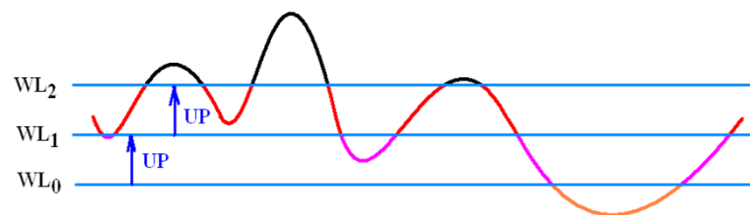


Variantes al método



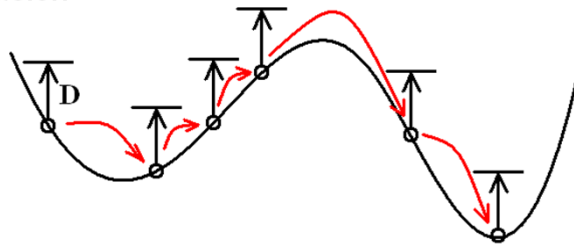
Algoritmo del “Diluvio universal”

1. Seleccionar una solución inicial
2. Elegir el “ritmo de lluvia” (*rain speed*) $UP > 0$
3. Elegir una “cota inicial del agua” (water level) $WL > 0$
4. Generar una solución y obtener su evaluación E . Si $E > WL$ entonces se acepta el movimiento
5. $WL = WL + UP$
6. Volver al paso 4 hasta encontrar un criterio de terminación



Aceptación por cercanía al líder

1. Seleccionar una solución inicial y evaluarla $E = \text{record}$
2. Elegir una desviación permitida, $D > 0$
3. Generar una solución del entorno y obtener su evaluación E
 - a) Si $E > \text{Record} - D$, aceptar el movimiento
 - b) Si $E > \text{Record}$, entonces $\text{Record} = E$ nuevo
4. Volver al paso 3 hasta encontrar un criterio de terminación



Conclusiones

1. La aceptación por umbrales puede considerarse una variante determinista del *Simulated Annealing*
2. Permite alcanzar buenas soluciones en tiempos razonables de cálculo
3. Precisa de un ajuste previo de los parámetros que guían el algoritmo



Objetivos

1. Concienciarse de la dificultad que tienen los problemas reales de optimización con varios objetivos
2. Conocer los conceptos relacionados con los óptimos de Pareto
3. Entender la utilización en un caso sencillo relacionado con algoritmos heurísticos

Contenido

1. Motivación
2. Optimización multiobjetivo
3. Concepto de óptimo de Pareto
4. Ejemplo aplicado en heurísticas

Motivación

Muchos problemas reales deben satisfacer, a la vez, varios objetivos de forma conjunta. Sin embargo, es habitual que los objetivos estén en conflicto entre sí.

- Un algoritmo debe ser rápido y dar soluciones de calidad
- Un vehículo al ir más rápido, consume más combustible
- Un edificio debe ser económico, seguro y fácil de mantener

Motivación

- Para simplificar, muchas veces los problemas tienden a modelarse para cumplir uno sólo de los objetivos y dejar el resto como restricciones
- Otras veces se transforman las distintas funciones objetivo en una sola función que es suma ponderada de las otras, con el problema añadido de los pesos asignados

Optimización multiobjetivo

Encontrar un vector $\vec{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$, que satisfaga las restricciones:

$$g_i(\vec{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

$$h_j(\vec{x}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

y que optimice la función vectorial

$$\vec{f}(\vec{x}) = [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})]^T$$

siendo $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ el vector de variables de decisión

Concepto de óptimo de Pareto

Óptimo de Edgeworth-Pareto:

- El concepto más aceptado de “óptimo” en el marco de los problemas multiobjetivo es el originalmente propuesto por Edgeworth en 1881 y generalizado después por Pareto en 1896



Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926)
Economista y estadístico británico

Concepto de óptimo de Pareto

Eficiencia de Pareto u óptimo de Pareto:

- Algunos la llaman óptimo de Edgeworth-Pareto
- Concepto de la economía aplicable tanto a las ciencias sociales como a la ingeniería
- Es eficiente aquella situación en la que se cumple que no es posible beneficiar a más individuos en un sistema sin perjudicar a otros

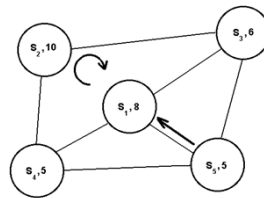


Vilfredo Federico Damaso Pareto (1848-1923)
Sociólogo, economista y filósofo italiano

Concepto de óptimo de Pareto

Aplicabilidad del concepto:

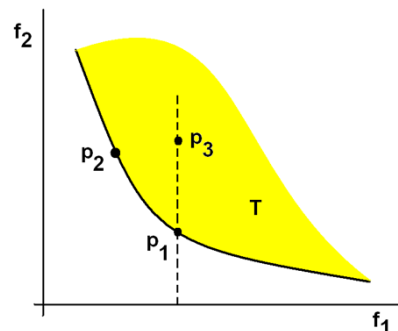
- Investigación operativa
- Teoría de juegos
- Toma de decisiones
- Optimización con objetivos múltiples
- Análisis coste-beneficio



Concepto de óptimo de Pareto

Sea P un problema de **optimización multiobjetivo**

- Se dice entonces que una solución P_i es **pareto-óptima** cuando no existe otra solución P_j tal que mejore en un objetivo sin empeorar al menos uno de los otros



Concepto de óptimo de Pareto

Dominancia de Pareto:

Dado un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, se dice que
domina a otro vector $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ si y sólo si:

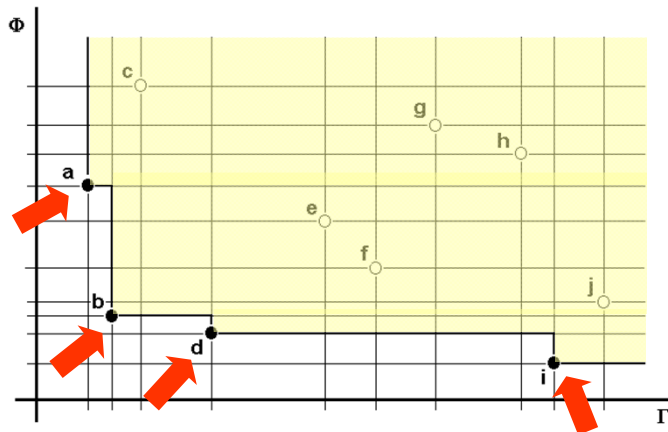
$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad u_i \leq v_i \quad \text{y} \quad \exists i_0 \in \{1, 2, \dots, k\} \quad | \quad u_{i_0} < v_{i_0}$$

Concepto de óptimo de Pareto

Optimalidad de Pareto:

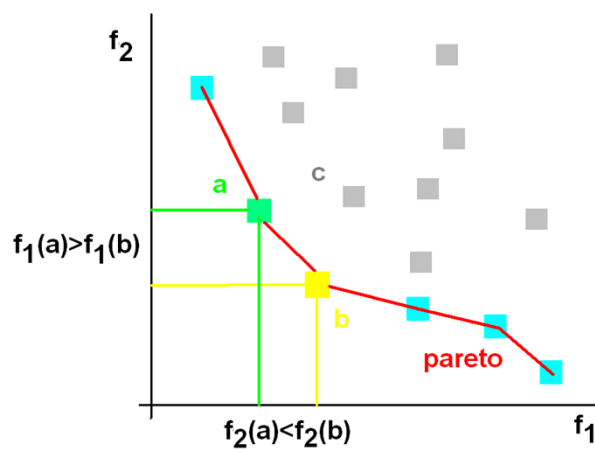
- Una solución $\mathbf{x}^*$ se dice que es Pareto-óptima si y sólo si no existe otro vector $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ domine a $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = (u_1, u_2, \dots, u_k)$
- Es decir, $\mathbf{x}^*$ es un óptimo de Pareto si no existe un vector $\mathbf{x}$ que haga mejorar alguno de los objetivos sin que empeore de forma simultánea alguno de los otros

Concepto de óptimo de Pareto



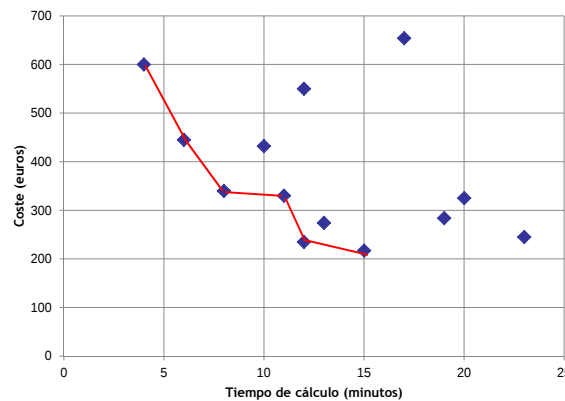
Concepto de óptimo de Pareto

Frontera de Pareto:



Ejemplo aplicado en heurísticas

HEURÍSTICA	TIEMPO DE CÁLCULO	ÓPTIMO LOCAL
H1	6	445
H2	8	340
H3	11	330
H4	12	235
H5	13	274
H6	15	217
H7	17	654
H8	19	284
H9	20	325
H10	10	432
H11	23	245
H12	12	550
H13	4	600



Conclusiones

1. Muchos problemas de decisión reales implican optimizar varios objetivos, a veces contrapuestos
2. El concepto de óptimo de Pareto permite descartar fácilmente opciones, dejando la decisión circunscrita a la denominada frontera de Pareto
3. El concepto es útil en el caso de comparar algoritmos cuando sabemos el tiempo de cálculo y la calidad del resultado