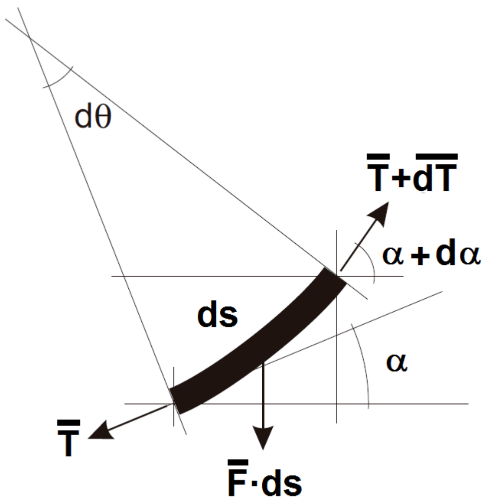
HILO O CABLE COLGADO. CATENARIA

Procedimientos de construcción. Prof. Víctor Yepes

Un cable colgado por sus dos extremos, con un peso por metro lineal *p*, presenta tensiones en cada una de sus secciones. Siendo *s* la longitud medida a lo largo del cable, en un tramo suficientemente pequeño *ds*, el equilibrio de fuerzas que se puede observar en la figura nos proporciona la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{dT} + \vec{F} \cdot ds = 0$$



Expresada la ecuación vectorial en coordenadas cartesianas, tenemos:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \cdot \cos\varphi \\ T \cdot \cos\theta \\ T \cdot \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \cdot \dfrac{dx}{ds} \\ T \cdot \dfrac{dy}{ds} \\ T \cdot \dfrac{dz}{ds} \end{pmatrix}$$

Por lo que se puede expresar también como tres ecuaciones escalares:

$$d\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right) + F_x \cdot ds = 0$$

$$d\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right) + F_y \cdot ds = 0$$

$$d\left(T \cdot \frac{dz}{ds}\right) + F_z \cdot ds = 0$$

Si consideramos unos ejes *x* e *y* que contengan al plano del cable, resulta que:

$$\frac{\partial\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right)}{\partial s} = 0$$

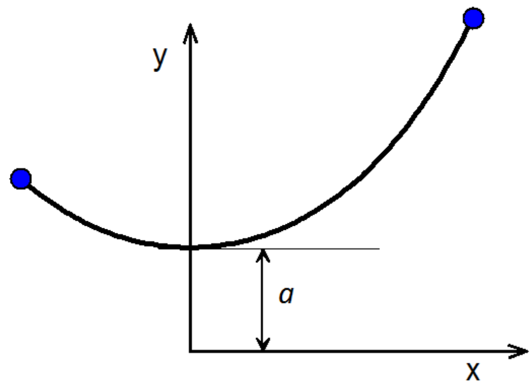
$$\frac{\partial\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right)}{\partial s} = p$$

Integrando ambas ecuaciones,

$$T \cdot \frac{dx}{ds} = K_1 = p \cdot a$$

$$T \cdot \frac{dy}{ds} = p \cdot s + K_2$$

Donde *a* es la ordenada en el punto más bajo.



Si se considera el origen de arcos *s* en el punto más bajo de la curva, entonces K_2=0, pues si *s*=0, entonces $\frac{dy}{ds} = \cos\theta = 0$.

De esta forma obtenemos las dos ecuaciones fundamentales de la catenaria:

$$T \cdot \frac{dx}{ds} = p \cdot a$$

$$T \cdot \frac{dy}{ds} = p \cdot s$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{s}{a}$$

Derivando respecto a *x*, tendremos que:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{a} \cdot \frac{ds}{dx}$$

Y como

$$\frac{ds}{dx} = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan\varphi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

Se obtiene

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$$

Que se puede integrar separando variables

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \int \frac{dx}{a}$$

Y por tanto,

$$ar\sinh y' = \frac{x}{a} + C_1$$

Puesto que la tensión horizontal es nula, $C_1 = 0$, por lo que

$$y' = \sinh\frac{x}{a}$$

Volviendo a integrar,

$$y = a \cdot \cosh\frac{x}{a} + C_2$$

Cuando $x = 0$, entonces $y = a$, implica que $C_2 = 0$.

Como consecuencia de todo lo anterior, la ecuación de un cable suspendido por sus dos extremos y sometido únicamente a su propio peso es la denominada **ecuación de la catenaria**:

$$y = a \cdot \cosh\frac{x}{a} = a \cdot \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$