

## APLICACIÓN DE OPTIMIZACIÓN KRIGING PARA LA BÚSQUEDA DE ESTRUCTURAS ÓPTIMAS ROBUSTAS

V. Yepes<sup>1</sup>, V. Penadés-Pla<sup>2</sup>, T. García-Segura<sup>3</sup>

### ABSTRACT

All the structural problems have an associated variability or uncertainty. In the design of structures there are parameters such as the dimensions of the structure, the mechanical characteristics of the materials or the loads that can have variations with respect to the design value. The goal of the robust design optimization is to obtain the design that is optimum and is less sensitive to variations of these uncertain initial parameters. The main limitation of the robust design optimization is the high computational cost required due to the high number of optimizations that must be made to assess the sensitivity of the objective response of the problem. For this reason, kriging model is applied to carry out the optimization process more efficiently. In this work, it is going to apply the robust design optimization on a continuous pedestrian bridge of prestressed concrete and box section.

*Keywords: Post-tensioned concrete; Box-girder bridge; Robust design optimization; RDO; Kriging*

### 1. INTRODUCCIÓN

En todos los problemas estructurales existe una variabilidad o incertidumbre asociada. En el diseño de estructuras hay parámetros de diseño como las dimensiones de la estructura, las características mecánicas de los materiales o las cargas de diseño que pueden tener variaciones respecto al valor de diseño. Lo mismo ocurre a la hora de valorar una función objetivo asociada a la estructura. Por un lado, a la hora de diseñar una estructura el valor nominal utilizado es aquel que tiene una baja probabilidad de ocurrir (por ejemplo, la resistencia característica del hormigón es aquella que tiene una probabilidad del 5% de fallo). Además, se asignan coeficientes de seguridad asociados a una probabilidad de fallo determinada. Por otro lado, a la hora de valorar una función objetivo, como el coste[1,2] o algún impacto medio ambiental [3–5], el valor unitario de esta función suele ser la media. Dado este enfoque, la optimización estructural se convierte en una optimización determinista que desprecia los efectos de la incertidumbre asociada. Esto significa que la estructura tiene un comportamiento óptimo solo bajo las condiciones definidas inicialmente, pudiendo la respuesta variar significativamente cuando los valores se alejan de los valores de diseño[6–8].

Al contrario de este enfoque, el diseño probabilístico ha sido estudiado para obtener diseños en los que la variabilidad de las variables y parámetros de entrada influyan lo mínimo posible en la respuesta

<sup>1</sup> Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH). Universitat Politècnica de València (España) [vyepesp@cst.upv.es](mailto:vyepesp@cst.upv.es).

<sup>2</sup> Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH). Universitat Politècnica de València (España) [vipepl2@cam.upv.es](mailto:vipepl2@cam.upv.es) (Corresponding autor).

<sup>3</sup> Departamento de Ingeniería de la Construcción. Universitat Politècnica de València (España) [tagarse@upv.es](mailto:tagarse@upv.es).

de salida. A esto se le conoce como diseño robusto [9]. Actualmente existen dos enfoques para abordar el diseño óptimo probabilístico de estructuras: *Reliability-Based Design Optimization* (RBDO) [10] y *Robust Design Optimization* (RDO) [11]. En la RBDO se estudia la probabilidad de fallo a partir de las variaciones de las variables de entrada. En el RDO se estudia aquel diseño que sea menos sensible a las variaciones de las variables de entrada. Este trabajo se centra en el RDO. El diseño robusto fue propuesto por Genichi Taguchi en la década de 1940, y lo aplicó en problemas de optimización en 1980 [12]. Para valorar la robustez, la media y la desviación típica se consideran para definir todas aquellas variables o parámetros de las cuales se quiere minimizar su efecto, y se estudian la media y la desviación típica de la respuesta calculada.

La principal limitación del diseño óptimo robusto es el elevado coste computacional requerido debido al elevado número de optimizaciones que se deben realizar para valorar la sensibilidad de la respuesta del problema. Por este motivo es necesario encontrar metodologías que permitan realizar el proceso de optimización de forma más eficiente. Los metamodelos permiten generar una aproximación matemática en forma de superficie de respuesta a partir de la valoración de unos puntos dentro del espacio de diseño. Esto permite que, una vez generada la superficie de respuesta, la obtención del valor objetivo dado unas variables de entrada sea mucho más rápida. Estas aproximaciones matemáticas o metamodelos ya se han usado para solventar problemas de proceso de RDO [9,13]. De todos estos metamodelos, el modelo Kriging ha demostrado obtener una gran fiabilidad en la valoración de la respuesta debido a su precisión de predicción en funciones no lineales [14]. Penadés-Plà et al. [15] realizó una comparación entre una optimización heurística convencional y una optimización heurística basada en modelos kriging en la que demostró que las soluciones obtenidas mediante la optimización basada en modelos kriging se acercan mucho a las soluciones obtenidas mediante la optimización heurística convencional con un elevado ahorro de coste computacional.

En este trabajo se va a aplicar la metodología de diseño óptimo robusto sobre un puente continuo de hormigón pretensado y sección en cajón. Para obtener esta meta, primero se va a adoptar la aproximación matemática mediante kriging, y posteriormente se va a utilizar el algoritmo de optimización *Simulated Annealing* para obtener el óptimo robusto. Esto se va a aplicar para obtener el puente más económico (menor coste) y con menor variabilidad en la estabilidad estructural (asociada a la flecha del punto central de vano intermedio)

## 2. DISEÑO ROBUSTO

El diseño óptimo robusto estudia la variación de la función objetivo generada por la incertidumbre de las variables de diseño. Por lo tanto, el objetivo del diseño óptimo robusto (RDO) es alcanzar aquel diseño que tenga el mejor valor de la función objetivo con la menor variación. Esto implica un problema de optimización multi-objetivo en el cual la media y la desviación típica son las funciones objetivos (Eq. 1).

$$\min \{ \mu_{F(x,z)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \sigma_{F(x,z)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \} \quad (1)$$

donde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  son valores determinísticos de las variables de diseño (en caso de ser valores determinísticos) o la media y la desviación típica (en caso de ser valores probabilísticos o random).

Es habitual que la optimización de dos funciones objetivos en el diseño óptimo robusto lleve a soluciones conflictivas. Esto es porque una pequeña variación de las variables de diseño cerca del área del óptimo puede provocar variaciones elevadas en la valoración de la función objetivo. Esta situación lleva a cabo la obtención de una frontera de Pareto como representación de las soluciones óptimas robustas. La figura 1 muestra un ejemplo de las diferencias entre el diseño óptimo y el diseño óptimo robusto en un espacio de diseño de una variable. La solución A corresponde a la solución óptima, y la solución B corresponde a la solución óptima robusta. Se puede observar que la misma variación de la variable de diseño del punto A causa una mayor variación en la función objetivo que en el punto B.

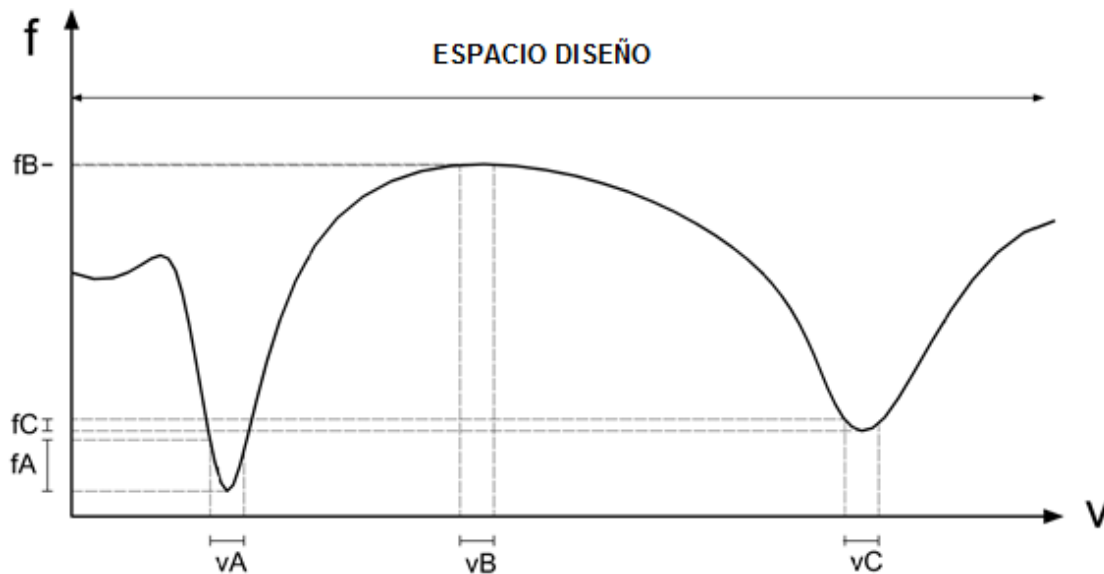


Figura 1. Ejemplo de diseño óptimo robusto

### 3. DISEÑO ÓPTIMO ROBUSTO USANDO METAMODELOS

#### 3.1. Creación del metamodelo

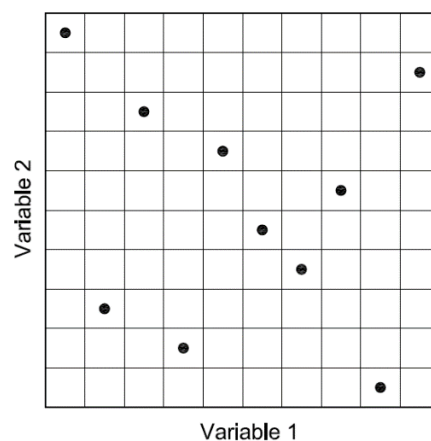
La base de los metamodelos consiste en construir un modelo matemático aproximado de un modelo de simulación detallado (es decir, un modelo de un modelo), que predice los datos de salida (respuesta objetiva) a partir de los datos de entrada (variables de diseño) en todo el espacio de diseño, de forma más eficiente que los modelos de simulación detallados. El proceso de construcción de un metamodelo se centra en tres partes principales: (a) obtener los puntos iniciales del conjunto de datos de entrada dentro del espacio de diseño, (b) elegir el tipo de metamodelo para construir el modelo matemático aproximado y (c) elegir el modelo de ajuste. Hay un gran número de opciones para llevar a cabo estos pasos [16]. Independientemente de la elección de cada paso, el objetivo principal de la construcción de un metamodelo es obtener un modelo con la mayor precisión posible para predecir la respuesta objetiva.

La elección de los puntos iniciales del conjunto de datos dentro del espacio de diseño se define por el tamaño de la muestra y la posición de los puntos, ya que ambos aspectos influyen en la construcción del modelo. Por un lado, el tamaño de la muestra está fundamentalmente relacionado con el número de variables de diseño. El tamaño de la muestra debe ser mayor con un mayor número de variables de

diseño para la misma precisión del metamodelo, y por lo tanto el costo computacional necesario para construir el modelo será mayor. Por otro lado, una vez definido el tamaño de la muestra, la posición de los puntos debe situarse dentro del espacio de diseño para obtener la mejor información posible. Este proceso se llama Diseño de Experimentos o *Design Of Experiments* (DOE).

El DOE se puede dividir en dos grupos diferentes. El primer grupo agrupa los diseños clásicos, que incluyen los diseños factoriales o fraccionales, los diseños compuestos centrales, los diseños Box-Behnken, los diseños Plackett-Burman, los diseños Koshal y los diseños D-optimal [17]. Estos tipos de diseños tienden a esparcir los puntos de muestra alrededor del borde del espacio de diseño y sólo incluyen unos pocos puntos dentro de él. Los diseños clásicos se utilizan principalmente para construir metamodelos polinómicos. Cuando los puntos de entrada de datos iniciales se utilizaron para construir metamodelos más avanzados, se prefirieron otros diseños, llamados diseños de *space-filling*. Estos tipos de diseños tienden a distribuir los puntos de muestreo por todo el espacio de diseño, por lo que es posible tener en cuenta los fenómenos locales en cualquier región del espacio de diseño. Los diseños de *space-filling* más populares son el muestreo de hipercubos latinos [18], los diseños basados en la distancia [19] y las secuencias de baja discrepancia, que agrupan el muestreo de secuencias de Hammersley [20] y el diseño uniforme [21].

En este trabajo, para generar la muestra, se ha considerado el muestreo de Hipercubo Latino o *Latin Hypercube Sampling* (LHS). La efectividad del hipercubo latino en la estimación de la respuesta objetiva del metamodelo ha sido demostrada en varios trabajos[22,23]. El LHS fue propuesto por McKay et al. en 1979 [18]. Este método determina el número  $N$  de intervalos no solapados para cada variable a partir de un número de variables de diseño ( $v$ ) y un número de puntos del conjunto de datos de entrada inicial ( $N$ ). Por lo tanto, el espacio de diseño se divide en regiones  $N^v$ . Cada punto de muestra se ubicará en una región para que cada punto corresponda a una combinación de diferentes intervalos de cada rango de variables de diseño. De esta manera, cada intervalo de cada rango de variables de diseño sólo se asociará a un punto de muestra. En consecuencia, el LHS garantiza que todas las variables de diseño estén representadas a lo largo de sus respectivas rangos. La Figura 2 muestra un ejemplo con 2 variables de diseño y 8 puntos de datos de entrada iniciales.



**Figura 2.** Ejemplo de muestreo de hipercubo latino

Una vez definida la muestra, se obtiene la respuesta objetiva de los puntos iniciales del conjunto de datos de entrada. Toda esta información inicial (entradas y salidas) se utiliza para construir el

metamodelo en todo el espacio de diseño. De esta manera, el metamodelo predice la respuesta objetiva según una función matemática:

$$y = f(x) = g(x) + \varepsilon \quad (2)$$

donde  $x$  son los puntos del conjunto de datos de entrada,  $f(x)$  corresponde a la respuesta real (modelo),  $g(x)$  representa la respuesta aproximada (metamodelo) y  $\varepsilon$  representa el error de aproximación. Existen varias formulaciones matemáticas para construir metamodelos con diferentes características [16,24]. Aunque estos metamodelos han sido comparados [23,25,26], no es posible determinar si uno es mejor que los otros, ya que esto depende del problema planteado. Sin embargo, los metamodelos más comunes son la regresión polinómica, las redes neuronales y el kriging [24,27]. El modelo de superficie de respuesta basado en polinomios es a veces difícil de usar en problemas de ingeniería complejos, y el modelo basado en redes neuronales requiere muchos puntos de muestreo y mucho tiempo computacional para el entrenamiento de la red [28]. El modelo de kriging es un metamodelo prometedor, ya que es más flexible que los modelos basados en polinomios y requiere menos tiempo que las técnicas basadas en redes neuronales [25]. Así, este trabajo utiliza la formulación del kriging para construir el metamodelo.

Kriging es un metamodelo que tiene sus orígenes en aplicaciones geoestáticas que involucran datos espacial y temporalmente correlacionados y fue desarrollado por el ingeniero de minas sudafricano llamado Danie Gerhardus Kirge. Más tarde, muchas investigaciones contribuyeron al problema de la predicción espacial óptima, pero el método fue formalizado por Matheron en 1963 [29] quien usó el término kriging en honor a la contribución de Danie Gerhardus Kirge [30]. La idea detrás de kriging es que la respuesta determinista  $y(x)$  puede ser descrita como:

$$y(x) = f(x) + Z(x) \quad (3)$$

donde  $f(x)$  es la función de aproximación conocida, y  $Z(x)$  es una realización de un proceso estocástico con media cero, varianza  $\sigma^2$  y covarianza distinta de cero. El primer término de la ecuación,  $f(x)$ , es similar a un modelo de regresión que proporciona una aproximación global del espacio de diseño (Eq. 4). El segundo término,  $Z(x)$ , crea desviaciones locales de modo que el modelo de kriging interpola los puntos iniciales de la muestra (Eq. 5). En muchos casos,  $f(x)$  es simplemente un término constante y el método se llama entonces kriging ordinario. Si  $f(x)$  se ajusta a 0, lo que implica que la respuesta  $y(x)$  tiene una media de cero, el método se denomina kriging simple [31].

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot f_i(x) \quad (4)$$

$$cov[Z(x_i), Z(x_j)] = \sigma^2 \cdot R(x_i, x_j) \quad (5)$$

donde la desviación del proceso  $\sigma^2$  escala la función de correlación espacial  $R(x_i, x_j)$  entre dos puntos de datos. En el diseño de ingeniería, la función de correlación gaussiana (Eq. 6) es la función más utilizada [31] que puede definirse con un solo parámetro ( $\theta$ ) que controla el área de influencia de los puntos cercanos [28]. Un bajo  $\theta$  significa que todos los puntos de la muestra tienen una alta correlación, por lo que el término  $Z(x)$  será similar en todo el espacio de diseño. A medida que el valor  $\theta$  aumenta, los puntos con mayor correlación estarán más cerca, por lo tanto el término  $Z(x)$  diferirá dependiendo del punto en el espacio de diseño:

$$R(x_i, x_j) = e^{-\sum_{k=1}^m \theta |x_k^i - x_k^j|^2} \quad (6)$$

Finalmente, cada tipo de metamodelo tiene su método de ajuste asociado. En este caso, la formulación de kriging utiliza la búsqueda del mejor pronosticador lineal imparcial (BLUP). Simpson et al. [24] dieron una revisión detallada de las ecuaciones y métodos de ajuste para los tipos de metamodelos comunes.

### **3.2. Aplicación del metamodelo para la obtención diseño óptimo robusto**

El diseño óptimo robusto se mide por la media ( $\mu$ ) y la desviación típica ( $\sigma$ ) de la respuesta objetiva. Para alcanzar estos parámetros estadísticos, se debe realizar el cálculo de un mismo diseño con variación en la incertidumbre del parámetro de diseño. De esta manera, la media se refiere al diseño óptimo, y la desviación típica se refiere al diseño robusto. Por lo tanto, la optimización del diseño óptimo robusto trata de alcanzar la solución que tenga al mismo tiempo el mejor valor medio de la respuesta objetiva y la mínima variación de la respuesta objetiva causada por la incertidumbre de los parámetros de diseño. Esto provoca un elevado coste computacional, prácticamente imposible de alcanzar en los procesos de optimización, ya que para cada iteración se deberían realizar un cálculo probabilístico para obtener la media y la desviación típica, y realizar el cálculo del diseño y la verificación de las restricciones repetidas veces. Por esta razón, el uso de los metamodelos para el problema de diseño óptimo robusto es imprescindible.

Por lo tanto, para definir la superficie del modelo kriging cada punto de la muestra inicial definida por el LHS se calcula un número determinado de veces variando el parámetro de diseño con incertidumbre. De esta forma se obtiene para cada uno de estos puntos un número determinado de respuestas diferentes, con lo que se puede obtener tanto la media ( $\mu$ ) como la desviación típica ( $\sigma$ ). A continuación, el modelo kriging se utiliza para la optimización del problema, evitando que en cada iteración se realice el cálculo probabilístico y reduciendo considerablemente el coste computacional.

El problema de la optimización del diseño robusto implica una optimización multiobjetivo. Por lo tanto, esta optimización busca minimizar a la vez la media y desviación típica de la función objetivo (Eq. 1). Todo esto satisfaciendo las restricciones existentes en el problema. Para ello, el algoritmo utilizado para llevar a cabo el problema de optimización es el *Simulated Annealing* (SA) [32] debido a su versátil criterio de aceptación. Muchos trabajos utilizan el SA para llevar a cabo una optimización heurística convencional [33,34]. En este trabajo, la temperatura inicial se calibra siguiendo el método de Medina [35], que propone que la temperatura inicial se reduzca a la mitad cuando el porcentaje de aceptaciones es superior al 40%, y se duplique cuando es inferior al 20%. Después de esto, la temperatura disminuye de acuerdo a un coeficiente de enfriamiento  $k$  siguiendo la ecuación  $T=k*T$ , cuando termina una cadena de Markov. En este trabajo, la calibración reveló que un coeficiente de enfriamiento de 0,8 y una longitud de la cadena de Markov de 1000 son apropiados. El algoritmo termina después de que tres cadenas de Markov no muestran ninguna mejora.

## **4. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA**

La estructura considerada es un tablero continuo de hormigón para puentes peatonales con tres vanos continuos de 40-50-40 metros de longitud. El ancho del tablero del puente peatonal (B) es de 3 metros. Las otras dimensiones geométricas que definen la sección transversal del tablero del puente

peatonal son variables (Figura 3): canto ( $h$ ), anchura inferior ( $b$ ), anchura de la inclinación del alma ( $d$ ), espesor de la losa superior ( $e_s$ ), espesor de la sección exterior en voladizo ( $e_v$ ), espesor de la losa inferior ( $e_i$ ) y espesor de la losa del alma ( $e_a$ ). La longitud del enlace ( $t$ ) se obtiene siguiendo la recomendación de Schlaich y Scheff [36].

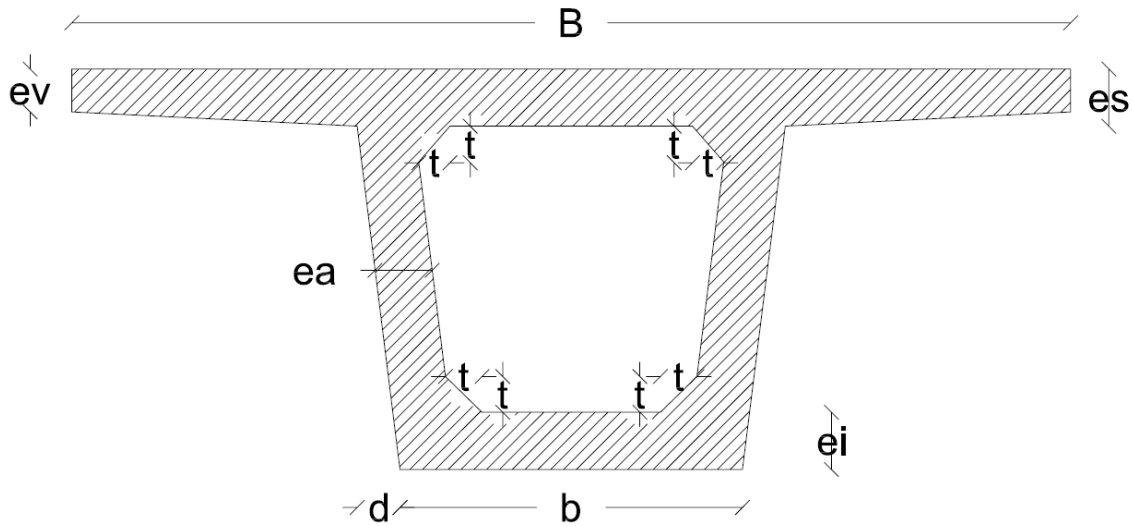


Figura 3. Sección transversal del puente

Además, la resistencia del hormigón ( $f_{ck}$ ) se considera una variable. El acero pretensado está formado por tendones de 0,6 pulgadas y pretensado a 195,52 kN, y las vainas están distribuidas simétricamente a través de las bandas con una disposición parabólica. La excentricidad máxima se localiza dónde el momento de flexión es el mínimo o máximo (Figura 4), donde la distancia de las vainas a la superficie es de 0,2 metros. Además, la distancia entre los pilares y el punto de inflexión de acero pretensado es del 5% de la longitud de cada vano.

La posición de la armadura pasiva se determina según la figura 5. El refuerzo longitudinal se define por el número de barras por metro y su diámetro, situadas en la losa superior (LRn1, LRØ1), las alas (LRn2, LRØ2, LRn3, LRØ3), las almas (LRn4, LRØ4), la losa inferior (LRn5, LRØ5) y el núcleo interior (LRn6, LRØ6). Además, se considera armadura de refuerzo a flexión. La primera armadura de refuerzo cubre la losa superior de la zona de apoyo (LRØ7) con el mismo número de barras por metro que LRn1, y la segunda armadura de refuerzo cubre la losa inferior en el resto del vano exterior (LRØ8) y el vano central (LRØ9) con el mismo número de barras por metro que LRn5. El refuerzo transversal se define por el diámetro del refuerzo estándar (TRØ1, TRØ2, TRØ3, TRØ4, TRØ5, TRØ6, TRØ7) y la distancia (TRS).

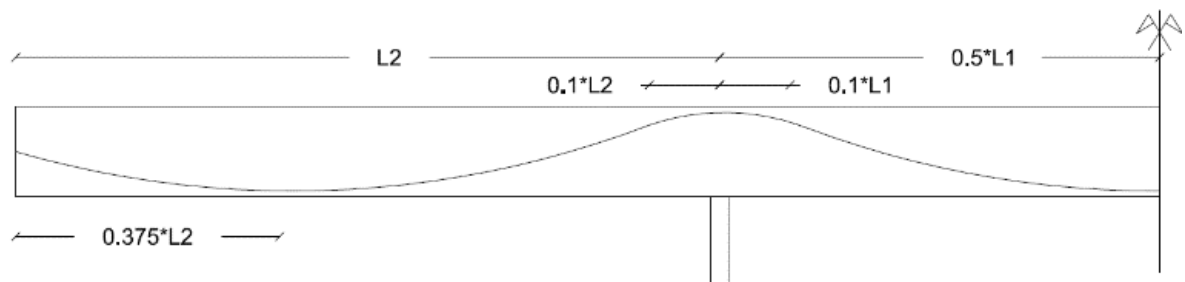


Figura 4. Trazado de cables de acero pretensado

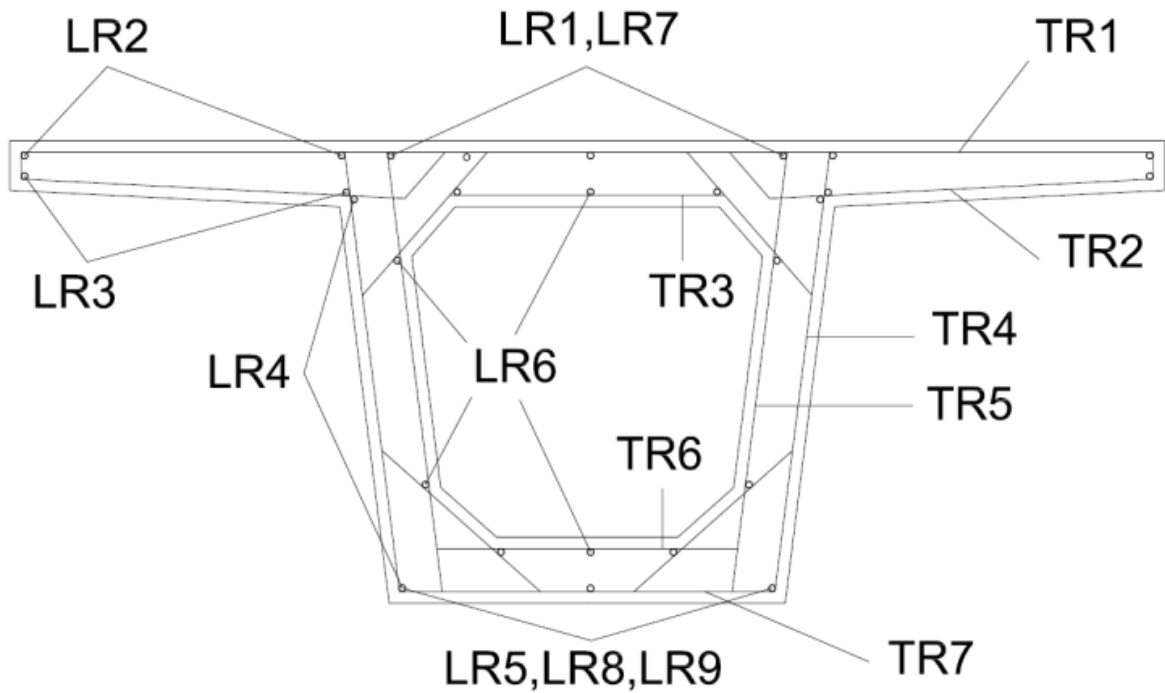


Figura 5. Armadura pasiva

El modelo kriging se ha construido a partir de un LHS de 500 puntos de acuerdo con Penadés-Plà et al. [15], con la función de correlación y regresión la gaussiana y cuadrática respectivamente. En este trabajo, el objetivo es encontrar aquel diseño de puente (características geométricas y resistencia característica), que variando algunas de los parámetros iniciales con incertidumbre, sea óptimo robusto frente a una función objetivo. El parámetro inicial con incertidumbre es el peso propio y el objetivo es encontrar el diseño más económico con menor variabilidad en el comportamiento estructural. Por un lado, el peso propio se ha escogido como parámetro inicial con incertidumbre ya que puede haber variaciones tanto en la densidad del hormigón como en el volumen total de hormigón. Por otro lado, el coste se ha escogido para representar una función objetivo clásica (como podría ser la energía y el CO<sub>2</sub>) y el comportamiento estructural se vincula a la flecha en el punto medio del vano central del puente.

Así pues, cada diseño determinado por el LHS se ha calculado 25 veces variando el valor del peso propio de forma uniformemente aleatoria entre 0.9·Peso propio y 1.1·Peso propio (un 10%) [9]. De esta forma se obtienen 25 costes y 25 flechas para cada uno de los diseños del LHS, y por lo tanto es posible obtener la media y la desviación típica de cada una de las funciones objetivo. En este caso de estudio, la optimización multi-objetivo (Eq. 7) se ha reducido a una optimización mono-objetivo (Eq. 8) realizando N optimizaciones diferentes correspondientes a la ecuación A. Estas N optimizaciones diferentes se obtienen asignando N pesos diferentes, donde para  $w_1$  va desde 0 hasta 1 con incrementos de  $1/N$ , siendo  $w_2=1-w_1$ .

$$\min \{ \mu_{COSTE}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \sigma_{FLECHA}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \} \quad (7)$$



$$\min \{w_1 \cdot \mu_{COSTE}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + w_2 \cdot \sigma_{FLECHA}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\} \quad (8)$$

$$G_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq 0 \quad (9)$$

donde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  son valores determinísticos de las variables de diseño (en caso de ser valores determinísticos) o la media y la desviación típica (en caso de ser valores probabilísticos o random).

## 5. RESULTADOS

Como se ha descrito más ampliamente en el punto anterior, el problema planteado consiste en minimizar la media del coste del puente y la varianza de la respuesta estructural representada por la desviación típica de la flecha en el punto central del vano medio. Para este objetivo, y siguiendo la metodología anteriormente planteada, se ha construido un modelo kriging con 500 puntos iniciales para posteriormente realizar una optimización mediante el algoritmo heurístico *Simulated Annealing*. Esta optimización se ha realizado convirtiendo la optimización multi-objetivo en una optimización mono-objetivo normalizando las dos funciones objetivo (media del coste y desviación típica de la flecha), y asignando pesos relativos a ambos valores. Para una mayor precisión en la frontera de Pareto se han utilizado un vector de pesos de 500 valores, de forma que  $w_1$  va desde 0 hasta 500 con incrementos de  $1/500$ , y  $w_2$  corresponde a  $1-w_1$ .

Siguiendo este procedimiento se han obtenido las soluciones mostradas en la Figura 6. El eje X corresponde a la media del coste del puente y el eje Y corresponde a la desviación típica de la flecha en el punto medio del vano central del puente. Se observa que las múltiples optimizaciones realizadas en función de los pesos asignados llegan a muchas soluciones, de las cuales once corresponden a la Frontera de Pareto. La Figura 7 muestra dicha frontera de Pareto.

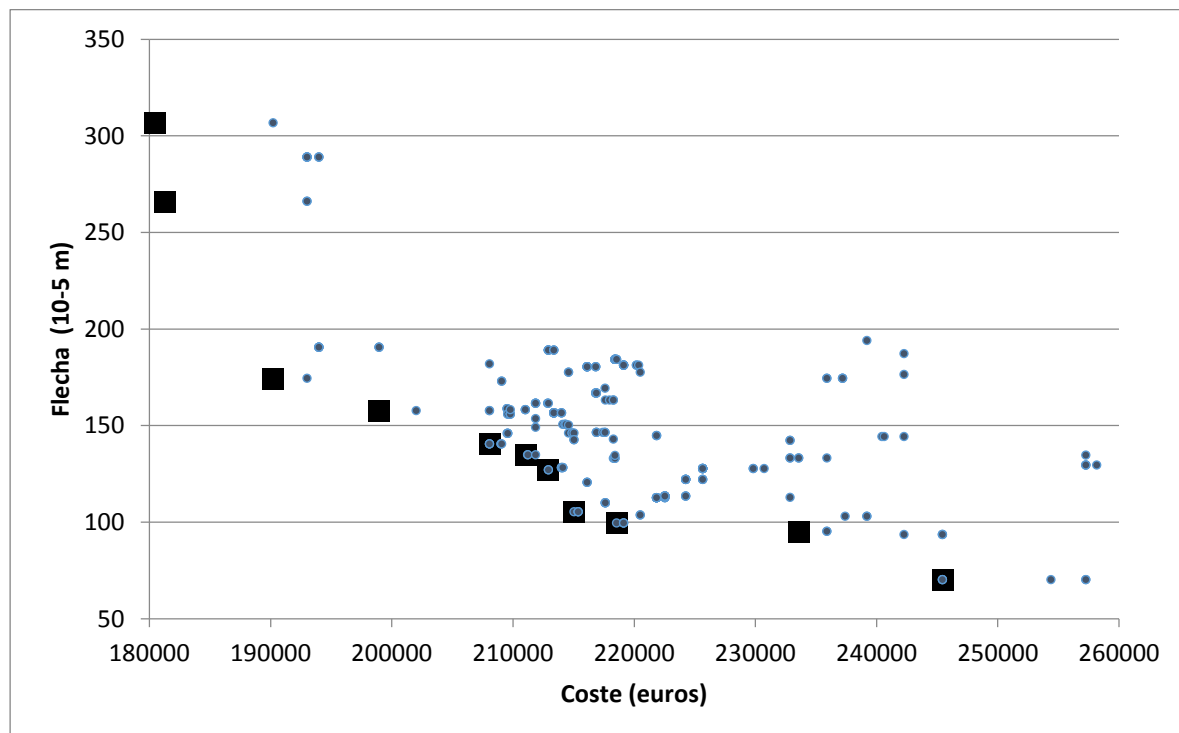
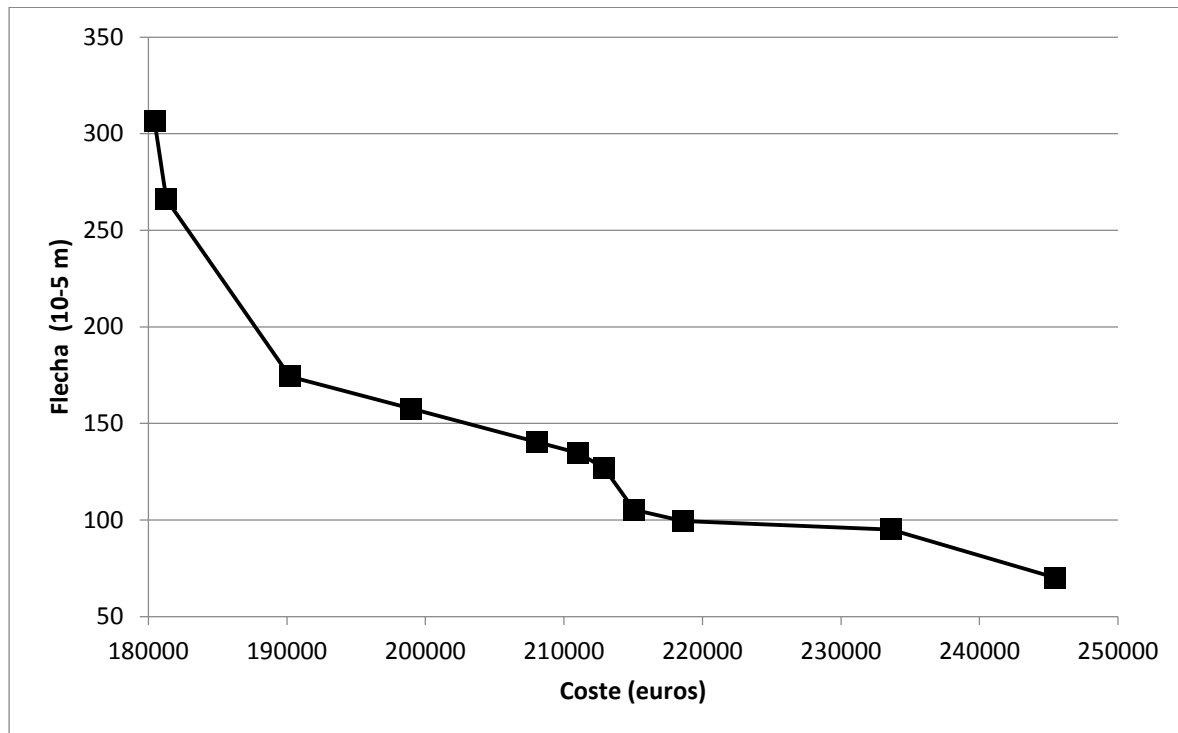


Figura 6. Soluciones optimizadas



**Figura 7.** Frontera de Pareto

Una vez obtenida la frontera de Pareto que determina las soluciones óptimas frente a coste y robustas frente al comportamiento estructural, la elección de una de ellas se convierte en un problema de toma de decisiones. Existen multitud de métodos para realizar la toma de decisiones, no obstante, en este caso se han señalado 3 alternativas diferentes (Tabla 1). La alternativa 1 corresponde con la de mejor valor medio del coste (la más barata), la alternativa 3 corresponde con la de mejor valor de desviación típica de la flecha (la que mejor comportamiento estructural tiene), y la alternativa 2 es aquella que más cercana esta al punto positivo ideal normalizado.

**Tabla 1.** Soluciones de la frontera de Pareto

Alternativa	b	h	d	$e_v$	$e_s$	$e_a$	$e_i$	$f_{ck}$	t	$\mu$ Coste (€)	$\sigma$ Flecha (m)
1	1600	1250	0	150	175	375	225	50	225	180441.89	3.07E-03
2	1350	1500	0	150	250	350	250	100	250	208099.77	1.40E-03
3	1350	2000	0	225	275	350	250	100	250	245455.87	7.01E-04

## 6. CONCLUSIONES

EL diseño óptimo robusto estudia el diseño que sea óptimo y menos sensible a las variaciones de los parámetros inciertos de entrada. En este trabajo se ha querido encontrar el puente peatonal de hormigón pretensado y sección en cajón óptimo frente al coste y robusto frente al comportamiento estructural (obtenido indirectamente mediante la flecha en el punto medio del vano central). Para ello, se ha propuesto una metodología utilizando el LHS y el metamodelo kriging para resolver, de forma eficiente, el problema de cuantificación de incertidumbre de la función objetivo en la optimización.

Para llevar a cabo este propósito, en primer lugar se ha generado una superficie de respuesta del modelo kriging a partir de 500 puntos iniciales dados por el LHS, en los cuales se variaba 25 veces el peso propio de forma que se defina tanto la media como la desviación típica de las funciones objetivo. Una vez definida la superficie kriging que permite predecir tanto la media del coste como la desviación típica de la respuesta estructural, se han realizado 500 optimizaciones con diferentes combinaciones de pesos de ambas funciones objetivo. Esta optimización probabilística hubiera sido prácticamente imposible de realizar sin el uso del modelo kriging debido al gran coste computacional requerido. Finalmente se ha definido la frontera de Pareto definida por los óptimos de Pareto.

Este procedimiento lleva a una serie de soluciones que son óptimas frente al coste y robustas frente al comportamiento estructural. Es por esto, que la elección de una solución u otra depende de las preferencias del decisor, convirtiéndose en un problema de toma de decisiones. En este caso, si se considera tanto la media del coste como la varianza de la respuesta estructural igual de importantes, se obtiene que el diseño óptimo robusto es la sección con:  $b = 1350$  mm,  $h = 1500$  mm,  $d = 0$  mm,  $e_v = 150$  mm,  $e_s = 250$  mm,  $e_a = 350$  mm,  $e_i = 250$  mm,  $t = 250$  mm y  $f_{ck} = 100$  MPa. Este diseño da un puente con un coste de 208099.77 euros y una desviación típica de la flecha del punto medio del vano central de  $1.40E-03$  metros.

Esta metodología permite obtener un diseño que sea óptimo frente a una función objetivo convencional (en este caso el coste), y que a la vez sea estable en su comportamiento estructural frente a las posibles variabilidades de los parámetros de diseño. En este caso se ha querido optimizar el coste de la pasarela, y se ha considerado la flecha del punto medio del vano central como referente para la respuesta estructural. Por otro lado, la variable de diseño inicial a la que se le ha asociado la incertidumbre ha sido el peso propio, ya que puede verse afectado tanto por la variabilidad de las dimensiones geométricas como por la densidad considerada del hormigón. No obstante, esta metodología puede ser aplicada para cualquier caso deseado, ya que la problemática del coste computacional de la optimización probabilística ha sido solventada mediante el uso del metamodelo kriging.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero del Ministerio de Economía y Competitividad español, así como la financiación del FEDER (Proyecto: BIA2017-85098-R).

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Yepes V, Martí JV, García-Segura T, González-Vidosa F. Heuristics in optimal detailed design of precast road bridges. *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 2017;17. doi:10.1016/j.acme.2017.02.006.
- [2] de Albuquerque AT, El Debs MK, Melo AMC. A cost optimization-based design of precast concrete floors using genetic algorithms. *Automation in Construction* 2012;22:348–56. doi:10.1016/J.AUTCON.2011.09.013.
- [3] Zastrow P, Molina-Moreno F, García-Segura T, Martí J V., Yepes V. Life cycle assessment of cost-optimized buttress earth-retaining walls: A parametric study. *Journal of Cleaner Production* 2017;140:1037–48. doi:10.1016/j.jclepro.2016.10.085.

- [4] Kripka M, Yepes V, Milani C, Kripka M, Yepes V, Milani CJ. Selection of sustainable short-span bridge design in Brazil. *Sustainability* 2019;11:1307. doi:10.3390/su11051307.
- [5] Penadés-Plà V, Martí JV, García-Segura T, Yepes V. Life-cycle assessment: A comparison between two optimal post-tensioned concrete box-girder road bridges. *Sustainability (Switzerland)* 2017;9:1864. doi:10.3390/su9101864.
- [6] Martí J V., García-Segura T, Yepes V. Structural design of precast-prestressed concrete U-beam road bridges based on embodied energy. *Journal of Cleaner Production* 2016;120:231–40. doi:10.1016/j.jclepro.2016.02.024.
- [7] García-Segura T, Yepes V, Martí J V., Alcalá J. Optimization of concrete I-beams using a new hybrid glowworm swarm algorithm. *Latin American Journal of Solids and Structures* 2014;11:1190–205. doi:10.1590/S1679-78252014000700007.
- [8] García-Segura T, Yepes V. Multiobjective optimization of post-tensioned concrete box-girder road bridges considering cost, CO2 emissions, and safety. *Engineering Structures* 2016;125:325–36. doi:10.1016/j.engstruct.2016.07.012.
- [9] Jurecka F, Ganser M, Bletzinger K-U. Update scheme for sequential spatial correlation approximations in robust design optimisation. *Computers & Structures* 2007;85:606–14. doi:10.1016/J.COMPSTRUC.2006.08.075.
- [10] Valdebenito MA, Schuëller GI. A survey on approaches for reliability-based optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2010;42:645–63. doi:10.1007/s00158-010-0518-6.
- [11] Doltsinis I, Kang Z. Robust design of structures using optimization methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2004;193:2221–37. doi:10.1016/J.CMA.2003.12.055.
- [12] Taguchi G. *Introduction to quality engineering*. Tokio: Asian Productivity Organisation; 1986.
- [13] Lee K-H, Kang D-H. A robust optimization using the statistics based on kriging metamodel. *Journal of Mechanical Science and Technology* 2006;20:1169–82. doi:10.1007/BF02916016.
- [14] Jin R, Du X, Chen W. The use of metamodeling techniques for optimization under uncertainty. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2003;25:99–116. doi:10.1007/s00158-002-0277-0.
- [15] Penadés-Plà V, García-Segura T, Yepes V. Accelerated optimization method for low-embodied energy concrete box-girder bridge design. *Engineering Structures* 2019;179:556–65. doi:10.1016/J.ENGSTRUCT.2018.11.015.
- [16] Barton RR, Meckesheimer M. *Metamodel-based simulation optimization*. vol. 13, 2006. doi:10.1016/S0927-0507(06)13018-2.
- [17] Myers RH, Montgomery DC, Anderson-Cook CM. *Response surface methodology: Process and product optimization using designed experiments*. Toronto, Canada: Wiley; 1995.
- [18] McKay MD, Beckman RJ, Conover WJ. Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics* 1979;21:239–45. doi:10.1080/00401706.1979.10489755.

- [19] Johnson ME, Moore LM, Ylvisaker D. Minimax and maximin distance designs. *Journal of Statistical Planning and Inference* 1990;26:131–48. doi:10.1016/0378-3758(90)90122-B.
- [20] Kalagnanam JR, Diwekar UM. An efficient sampling technique for off-line quality control. *Technometrics* 1997;39:308. doi:10.2307/1271135.
- [21] Fang K-T, Lin DKJ, Winker P, Zhang Y. Uniform design: Theory and application. *Technometrics* 2000;42:237. doi:10.2307/1271079.
- [22] Chuang CH, Yang RJ, Li G, Mallela K, Pothuraju P. Multidisciplinary design optimization on vehicle tailor rolled blank design. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2008;35:551–60. doi:10.1007/s00158-007-0152-0.
- [23] Jin R, Chen W, Simpson TW. Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2001;23:1–13. doi:10.1007/s00158-001-0160-4.
- [24] Simpson TW, Poplinski JD, Koch PN, Allen JK. Metamodels for computer-based engineering design: Survey and recommendations. *Engineering with Computers* 2001;17:129–50. doi:10.1007/PL00007198.
- [25] Li YF, Ng SH, Xie M, Goh TN. A systematic comparison of metamodeling techniques for simulation optimization in decision support systems. *Applied Soft Computing* 2010;10:1257–73. doi:10.1016/J.ASOC.2009.11.034.
- [26] Kim B-S, Lee Y-B, Choi D-H. Comparison study on the accuracy of metamodeling technique for non-convex functions. *Journal of Mechanical Science and Technology* 2009;23:1175–81. doi:10.1007/s12206-008-1201-3.
- [27] Bäckryd RD, Ryberg A-B, Nilsson L. Multidisciplinary design optimisation methods for automotive structures. *International Journal of Automotive and Mechanical EngineeringOnline* 2017;14:2229–8649. doi:10.15282/ijame.14.1.2017.17.0327.
- [28] Forrester AIJ, Keane AJ. Recent advances in surrogate-based optimization. *Progress in Aerospace Sciences* 2009;45:50–79. doi:10.1016/J.PAEROSCI.2008.11.001.
- [29] Matheron G. Principles of geostatistics. *Economic Geology* 1963;58:1246–66.
- [30] Cressie N. The origins of kriging. *Mathematical Geology* 1990;22:239–52. doi:10.1007/BF00889887.
- [31] Simpson TW, Mauery TM, Korte J, Mistree F. Kriging models for global approximation in simulation-based multidisciplinary design optimization. *AIAA Journal* 2001;39:2233–41. doi:10.2514/3.15017.
- [32] Kirkpatrick S, Gelatt CD, Vecchi MP. Optimization by simulated annealing. *Science (New York, NY)* 1983;220:671–80. doi:10.1126/science.220.4598.671.
- [33] Camp C V., Huq F. CO<sub>2</sub> and cost optimization of reinforced concrete frames using a big bang-big crunch algorithm. *Engineering Structures* 2013;48:363–72. doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.004.
- [34] Martí J V., González-Vidoso F, Yepes V, Alcalá J. Design of prestressed concrete precast road

- bridges with hybrid simulated annealing. *Engineering Structures* 2013;48:342–52.  
doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.014.
- [35] Medina JR. Estimation of incident and reflected waves using simulated annealing. *Journal of Watery, Port, Coastal, and Ocean Engineering* 2001;127:213–21.
- [36] Schlaich J, Scheef H. Concrete box-girder bridges. International Association for Bridge and Structural Engineering, Zürich, Switzerland: 1982.