

EL PROCESO ANALÍTICO JERÁRQUICO (AHP). FUNDAMENTOS, METODOLOGÍA Y APLICACIONES

José María Moreno Jiménez¹

Resumen:

Este trabajo presenta una revisión de una de las técnicas de decisión multicriterio más extendidas, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), desde la perspectiva del Paradigma de la Racionalidad Procedimental Multicriterio. En primer lugar, se analizan diferentes paradigmas de racionalidad propuestos en los últimos años para la toma de decisiones complejas, y se establece el marco conforme al cual, los desarrollos teóricos de esta técnica multicriterio pueden ofrecer una mayor y mejor explotación práctica. A continuación, se exponen las ideas subyacentes de la filosofía que soporta AHP, así como los fundamentos teóricos y la metodología de la misma. Seguidamente se ofrecen una serie de tópicos y referencias correspondientes a las aplicaciones prácticas de esta herramienta multicriterio. Se concluye mencionando algunos aspectos controvertidos de la metodología de AHP y posibles extensiones de ésta.

Palabras clave.- *Multicriterio, Proceso Analítico Jerárquico, AHP, Racionalidad Procedimental Multicriterio, Constructivismo Cognitivo.*

¹ Dpto. Métodos Estadísticos. Facultad de Económicas. Universidad de Zaragoza.
E-mail: moreno@posta.unizar.es

1.- Introducción

Cuando los coordinadores de este monográfico sobre Técnicas de Decisión Multicriterio, los profesores Gabriela Fernández y Rafael Caballero, me solicitaron que elaborara un artículo sobre el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), pensé, como suele ser lo habitual en este tipo de colaboraciones, en preparar una “revisión” en la que se presentaran los fundamentos teóricos de esta técnica multicriterio, se mencionaran diferentes aplicaciones que pusieran de manifiesto su enorme utilidad e interés práctico y, por último, citar algunos aspectos controvertidos de su metodología y posibles extensiones de la misma.

No obstante, durante la elaboración del documento se ha producido un hecho que me ha llevado a modificar ligeramente el enfoque inicialmente pensado para este trabajo. A lo largo del mes de febrero de 2001, se ha producido un intenso debate (internet) entre la comunidad científica multicriterio (véanse los mensajes aparecidos en el foro “*Multicriteria Discussion List* <MCRIT-L@LISTSERV.UGA.EDU>”) sobre la brecha existente entre la teoría y la práctica en este campo del saber. En el mismo, se han vuelto a poner de manifiesto las diferentes “sensibilidades” y “filosofías” sobre las que se elaboran las distintas aproximaciones multicriterio.

Al margen de que este tipo de debates “espontáneos” se puedan estar utilizando como reclamo (estrategia de marketing) para motivar la participación en algún evento científico (próxima reunión MCDM de El Cairo (Egipto), la anterior de Ankara (Turquía), etc.), algo lícito por otra parte, la intensidad y el interés de los mensajes enviados ponen de manifiesto las “dudas” que nos embargan a todos los que de alguna forma nos dedicamos a elaborar modelos, metodologías o aproximaciones científicas para su utilización práctica. Cuestiones como: (i) por qué las cosas no funcionan en la práctica como se nos dice en teoría; (ii) cómo se debería actuar; (iii) qué aproximaciones son mejores, etc., siguen sin resolverse de una forma satisfactoria.

En este sentido, he decidido aportar mi granito de arena a este debate y en este momento, teniendo en cuenta: (1) que éste es, por lo que yo conozco, el primer monográfico electrónico sobre multicriterio en español; (2) que la discusión realizada en la lista multicriterio internacional se está “hilando tan fino” que para mí resulta muy difícil expresar algunas percepciones y sentimientos en un idioma que no sea el materno, y (3) que, fundamentalmente, el debate sigue vivo.

Respecto a la “esencia” del problema, *la brecha existente entre la teoría y la práctica*, mencionar que si en general dentro de la modelización matemática esa brecha es importante, en el campo multicriterio el problema se agrava notablemente, debido a la complejidad de las situaciones tratadas y a la variedad de aproximaciones seguidas.

Como veremos con más detalle en las próximas secciones, dos ámbitos totalmente distintos se pueden diferenciar en la resolución “científica” de cualquier problema de decisión (se entiende complejo). Por un lado, está el “mundo de las ideas” con sus contenidos teóricos y, por otro, el “mundo de las acciones” con sus aplicaciones prácticas. En el primero (ámbito teórico), se recurre a modelos matemáticos que, como es bien sabido, son simplificaciones abstractas de la realidad en los que sólo se incorpora parte de la misma. Para resolver estos modelos se desarrollan una serie de técnicas que son válidas exclusivamente bajo los supuestos en los que se planteó el modelo matemático. En el segundo (ámbito práctico), las técnicas y los modelos desarrollados en el ámbito teórico son aplicados a situaciones reales donde las simplificaciones efectuadas al plantear el modelo

no se verifican. Es por ello, que suele presentarse una notable brecha entre los logros esperados y los resultados obtenidos.

De la propia definición de Ciencia, entendida, en su sentido tradicional, como el conjunto de conocimientos de validez universal caracterizados por su objetividad, causalidad y verificabilidad, se desprende que entre estos dos ámbitos de actuación existe una diferencia fundamental. En el ámbito teórico, para poder hablar de la aplicación del método científico en la resolución de problemas (sentido clásico), se exigía la separación entre lo objetivo y lo subjetivo, entre lo tangible y lo intangible, en resumen, entre lo racional y lo emocional. En cambio, en el ámbito práctico esa separación no sólo no se produce, sino que hay evidencias empíricas donde se pone de manifiesto que la *neutralidad de valores* exigida por la escuela tradicional es una hipótesis poco realista (Söderbaum, 1999; Kaufmann, 1999).

Más aún, la “práctica” de la toma de decisiones está estrechamente relacionada con aspectos subjetivos, intangibles por el momento, asociados al comportamiento del ser humano (actores participantes en los procesos de toma de decisiones). Por todo ello, si lo que se pretende es reducir la brecha actualmente existente entre la teoría y la práctica, será necesario incorporar de forma explícita el factor humano en los modelos teóricos, en especial en problemas de alta complejidad como suelen ser los relativos a aplicaciones prácticas dentro del campo de las ciencias sociales (Moreno, 1996, 1997; De Tombe, 2001).

En el caso particular de las técnicas de decisión multicriterio, esta recomendación debería interpretarse como sigue. Por un lado, se dispone de un conjunto de aproximaciones científicas (metodologías) que han dado lugar a una serie de técnicas multicriterio válidas para situaciones concretas bastante estructuradas. Por otro lado, se tiene un problema real, complejo y poco estructurado, que requiere una resolución efectiva. En este sentido, no se debe cometer el error, ampliamente estudiado por la Investigación Operativa, de “retocar” la realidad para aplicarle una herramienta analítica disponible (en nuestro caso alguna de las técnicas multicriterio existentes). Es preciso comprender cuáles son las diferencias en los fundamentos teóricos que soportan las distintas aproximaciones multicriterio, para, de esa forma, poder determinar la filosofía (técnica) más apropiada para cada situación real.

Ya no se contempla la existencia de una “verdad única”, sino la de “muchas verdades” asociadas a las percepciones de la realidad de los diferentes actores participantes en la resolución del problema. Es por tanto necesario que la metodología multicriterio seguida permita combinar lo objetivo, tangible y racional de la ciencia clásica con lo subjetivo, intangible y emocional del comportamiento humano. En este sentido, se puede conseguir un tratamiento objetivo de lo subjetivo (Keeney, 1992), y con ello, alcanzar un tratamiento racional de lo emocional.

Para una resolución efectiva del problema, no basta con aplicar la técnica multicriterio bajo un prisma exclusivamente teórico y objetivista (miopía de la racionalidad clásica), entendido como la aplicación de un procedimiento analítico que determine la solución “óptima” de un problema altamente estructurado. Hay que utilizar la herramienta multicriterio bajo un prisma práctico, esto es, siguiendo un paradigma de racionalidad más amplio, flexible y realista que el tradicional, donde se permita la incorporación del factor humano (integración de lo tangible y lo intangible) en la búsqueda de la “mejor” solución del problema.

Cuando lo desconocido de un problema es mucho mayor que lo conocido, como sucede en la resolución de problemas con alta complejidad (Moreno, 1997), es preferible dedicar nuestro esfuerzo a *mejorar el conocimiento y la calidad del proceso de decisión* que a la *búsqueda de una solución óptima* (verdad única), obtenida habitualmente a partir

de un conjunto de valores precisos asociados a los aspectos relevantes del problema. Salvo en problemas altamente estructurados, no suelen tener sentido las conclusiones derivadas de la utilización de valores precisos.

En general (Moreno, 1996; Moreno y otros, 1998), cuando se trabaja con aspectos subjetivos (problemas complejos), se recomienda la detección de los *puntos críticos* del proceso decisional, la búsqueda de las *oportunidades de decisión*, de las *tendencias*, de los *patrones de comportamiento* y de los *hechos estilizados*. Todo ello, para ayudar a diseñar *caminos de consenso* que faciliten el proceso negociador entre los actores participantes en el proceso de toma de decisiones.

Conforme a lo dicho anteriormente, a continuación se va a presentar una de las técnicas multicriterio más extendidas, el Proceso Analítico Jerárquico, pero no de forma aislada como correspondería a la introducción de un nuevo método referido a la resolución de un problema multicriterio estándar en el que se evalúan una serie de alternativas respecto a un conjunto de criterios (problema bastante estructurado). Su presentación se efectuará pensando en la aplicación de esta técnica y en la reducción de la brecha habitualmente existente entre la teoría y la práctica. Con este fin, se introduce AHP bajo el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio (Moreno, 1996, 1997; Moreno-Jiménez y otros, 1999; Moreno y otros 2001).

Para ello, antes de exponer los fundamentos teóricos, aplicaciones y controversias de AHP, se establece un marco apropiado para aprovechar e incrementar la potencia de esta técnica en el ámbito práctico. En este sentido, el trabajo se ha estructurado como sigue: la sección 2, bajo la denominación de Paradigmas Multicriterio, establece ese marco; la sección 3 esboza los fundamentos y las ideas intuitivas de AHP; la sección 4 presenta las fases de la metodología; la sección 5 las controversias y extensiones; la sección 6 algunas referencias relativas a las aplicaciones y, por último, la sección 7 resume las conclusiones más destacadas.

2.- Paradigmas multicriterio

La *Toma de Decisiones* es una de las actividades de los seres vivos en la que mejor se aprecia su nivel de evolución y organización. En los humanos, *decidir* es uno de los tópicos que más ha ocupado a la especie en su tratamiento desde todos los puntos de vista (filosóficos, sociológicos, psicológicos, económicos,...) y que mejor refleja su conocimiento, su procedimiento y, por último, su grado de libertad.

En el pasado (Moreno, 1993; Moreno y otros, 1998), la Toma de Decisiones se efectuaba basándose en el binomio *experiencia-intuición*. A medida que la complejidad de los problemas considerados ha ido creciendo, esto es, a medida que las situaciones contempladas han sido menos estructuradas e intervienen numerosos escenarios, actores y factores, el binomio seguido ha sido el de *información-razonamiento*, aunque en los últimos años se está considerando el de *conocimiento-razonamiento*.

Estos dos últimos términos sintetizan los aspectos más destacados a la hora de abordar la resolución sistematizada de problemas complejos en los que la incorporación del factor humano en el proceso de resolución, es fundamental para su correcta solución.

Por un lado, el término *razonamiento* se refiere al concepto de racionalidad entendido en el sentido clásico, esto es, la aplicación del método científico en la resolución de problemas. En este caso, la aproximación seguida debe cumplir los requisitos de objetividad, verificabilidad y causalidad exigidos en el *paradigma de racionalidad sustantiva* característico del enfoque tradicional en la Toma de Decisiones.

Por otro lado, el término *conocimiento*, entendido en el sentido de la inteligencia artificial (Moreno y Mata, 1992), se refiere a las creencias, ideas, reglas y procedimientos generalmente ciertos en un dominio particular, esto es, a la interpretación dada a la información existente dentro de un dominio específico (uso de la información).

Evidentemente, cuando se habla de la “interpretación” de la información por parte de los actores participantes en el proceso de toma de decisiones, se está contemplando explícitamente la incorporación de aspectos intangibles en el proceso de resolución, o si se prefiere, de los aspectos subjetivos asociados a la percepción de la realidad que tienen los participantes implicados en la resolución del problema.

Este binomio, conocimiento-razonamiento, en el que se integra lo *racional* del proceder científico en la toma de decisiones con lo *emocional* del comportamiento humano, refleja la filosofía subyacente en los “nuevos paradigmas” seguidos en los últimos años en el campo de las ciencias de la decisión (Funtowicz y Ravetz, 1991, 1994; Moreno y otros, 2001).

Características de los problemas altamente complejos, como son el dinamismo, la incertidumbre, la existencia de múltiples escenarios, criterios (habitualmente en conflicto) y actores, y, en especial, la necesidad de incorporar en la toma científica de las decisiones la opinión (visión de la realidad) de los diferentes participantes en la resolución del problema (actores), obligan a plantear aproximaciones metodológicas más abiertas, flexibles, realistas y efectivas que el enfoque tradicional. El objetivo final de estas nuevas aproximaciones será la fijación de una base teórica que permita ayudar a tomar decisiones en las que se armonicen las diferentes visiones de la realidad que tienen los actores implicados en el Proceso de Toma de Decisiones, con los valores fundamentales existentes en su entorno (éticos, culturales, estéticos, sociales, etc.).

La metodología resultante debería ser (Saaty, 1996): (a) simple en su construcción; (b) adaptable a las decisiones individuales y en grupo; (c) en consonancia con nuestros pensamientos, valores e intuiciones; (d) orientada a la búsqueda del consenso y (e) que no requiera una especialización suprema para su aplicación.

En cuanto a los *paradigmas de racionalidad* (aproximaciones científicas) seguidos en la toma de decisiones, los tres más extendidos son: *sustantiva* (decisor racional), *acotada* (decisor satisfactorio) y *procedimental* (decisor descriptivo).

El primero, es el que ha dominado la toma de decisiones desde su aparición a mediados del siglo XX (Von Neuman y Morgenstern, 1944; Savage, 1954). Está caracterizado por su comportamiento optimizador (maximización del bienestar) y se basa en el conocimiento de las alternativas, de sus consecuencias y del criterio seguido para la evaluación y comparación de las alternativas. Es una aproximación normativa guiada hacia la predicción y control, que explica cómo deben ser tomadas las decisiones.

El segundo, surge a finales de los años sesenta (Simon, 1964, 1972) motivado por las limitaciones cognitivas de los humanos¹. Se basa en dos ideas: la búsqueda y la satisfacción. La búsqueda va asociada al desconocimiento de las alternativas (en la práctica el decisor no conoce las consecuencias de las alternativas sino las expectativas de las mismas), y la satisfacción a la consecución de unos logros o metas para los objetivos (existe más de un objetivo).

¹ Kaufman (1999) contempla tres fuentes de restricciones cognitivas: (1) la limitada capacidad de procesamiento del cerebro humano (“estupidez”); (2) el desconocimiento de las alternativas del conjunto de elección (“ignorancia”); y (3) el papel de los aspectos emocionales y afectivos (“pasión”).

Además de la *racionalidad limitada*, en la que se reemplaza el concepto de optimización por el de satisfacción, frente a la *racionalidad sustantiva*, enfoque "duro", o aproximación orientada a la salida, que tiene un carácter técnico, cuantitativo e informativo, y cuyo propósito es la predicción y el control, a lo largo de los años 70, fruto del trabajo de los conductivistas y los psicólogos del conocimiento (Lichtenstein y Slovic, 1971; Tversky y Kahneman, 1972; Kahneman y Tversky, 1979), surge el tercer paradigma de racionalidad citado, la *racionalidad procedimental*, enfoque "blando", o aproximación orientada al proceso, que tiene un carácter práctico, realista y formativo, y cuyo propósito es la comprensión y el consenso (Moreno, 1993). Esta racionalidad se centra en cómo funciona el sistema, y es más práctica y próxima a la realidad que la sustantiva o económica. Pretende la incorporación a los modelos de aspectos subjetivos, por el momento intangibles y hasta ahora no considerados, que condicionan la toma de decisiones de los individuos y las organizaciones.

Desde comienzo de los 70, y en paralelo a la aparición en el ámbito científico de los paradigmas de racionalidad acotada y procedimental, surge, en la toma de decisiones, el *paradigma multicriterio* (Romero, 1993). En sus orígenes, intentó solventar algunas limitaciones del enfoque clásico, permitiendo la consideración de múltiples criterios. En la actualidad, como se desprende de las recientes definiciones dadas al campo del saber conocido como Decisión Multicriterio, sus aspiraciones son mucho mayores.

En concreto, si en el pasado se entendía la *Decisión Multicriterio* como: (1) la posibilidad de establecer un análisis equilibrado de los problemas de planificación, en particular los que presentan aspectos intangibles como los sociales y ambientales (Nijkamp y van Delft, 1977); (2) la investigación de un número de alternativas bajo la luz de múltiples criterios y objetivos en conflicto (Voogd, 1983); (3) un conjunto de modelos, métodos y técnicas para auxiliar a los centros decisores a describir, evaluar, ordenar, jerarquizar, seleccionar o rechazar objetos en base a una evaluación (Colson y de Bruin, 1989); (4) un conjunto de metodologías de ayuda a la toma de decisiones en problemas de medición complejos (Ridgley y Rijsberman, 1992); (5) un conjunto de herramientas para el análisis de las complejas propiedades existentes entre las alternativas (Eastman et al., 1993) y (6) la resolución de problemas de decisión complejos donde los criterios y objetivos pueden ser múltiples (Romero, 1993). En la actualidad, se considera que el objetivo de la Decisión Multicriterio es el de asistir en el proceso de toma de decisiones (Saaty, 1994; Moreno, 1996; Barredo, 1996).

En lo que sigue, se entiende por *Decisión Multicriterio* (Moreno, 1996) el conjunto de aproximaciones, métodos, modelos, técnicas y herramientas dirigidas a mejorar la calidad integral de los procesos de decisión seguidos por los individuos y sistemas, esto es, a mejorar la efectividad, eficacia y eficiencia de los procesos de decisión, y a incrementar el conocimiento de los mismos (valor añadido del conocimiento). De esta forma, las Técnicas de Decisión Multicriterio permiten una resolución más realista y efectiva del problema sin tener que recurrir, como ocurre con los enfoques tradicionales a la rígida reducción a una escala monetaria.

Junto a las dos escuelas mayoritariamente seguidas en la Toma de Decisiones: (i) la *normativa* (aproximación "dura" orientada a la salida), basada en el paradigma de racionalidad sustantiva, que indica cómo deberían tomarse las decisiones y qué métodos utilizar para ello, y (ii) la *descriptiva* (aproximación "blanda" orientada al proceso), basada en el paradigma de racionalidad procedimental, que indica cómo se toman las decisiones. En la última década se está planteando una tercera vía (Tversky, 1988): (iii) la escuela

prescriptiva o constructiva (aproximación “pragmática” orientada al conocimiento), basada en nuevos paradigmas de racionalidad, que indica cómo mejorar los procesos de decisión.

Dentro de esta nueva escuela, pero con características específicas, se pueden incluir:

- (1) la *Ciencia de Sistemas Blandos* (Soft System Science de Checkland and Scholes, 1990);
- (2) la *Ciencia Postnormal* de Funtowicz y Ravetz (1991, 1994);
- (3) el *Postmodernismo* de Harvey (1989) y Midmore (1996);
- (4) el *Realismo Crítico* de Gandy (1996), y
- (5) la *Racionalidad Procedimental Multicriterio* (RPM) de Moreno Jiménez (1996, 1997).

Conforme a los tres factores considerados en la especificación de todo paradigma (Tacconi, 2000), esta última racionalidad (RPM), en la que se conjugan características de los paradigmas multicriterio y procedimental, viene determinada (Moreno y otros, 2001) por su ontología *relativista y emocional*; su epistemología *adaptativa* y su metodología basada en el *constructivismo cognitivo*.

Este nuevo enfoque, de carácter descriptivo, cognitivo, adaptativo, pragmático, sistémico y general, trata de ayudar en la toma de decisiones mediante un mejor conocimiento de su proceso de decisión, esto es, un mejor conocimiento de las etapas, escenarios, elementos, factores, interdependencias, actores, interrelaciones y procedimientos que incluye.

En esencia, busca mejorar la calidad integral del proceso de toma de decisiones seguido por el sistema considerado. Para ello, intenta dotar de rigor científico cada una de las etapas y fases seguidas en el proceso de resolución.

En este caso, el análisis se dirigirá hacia: (1) la comprensión del proceso de decisión seguido; (2) el aumento del valor añadido del conocimiento alcanzado en la resolución del problema, esto es, la mejoría del conocimiento de las diferentes etapas, factores, elementos y actores, profundizando en el aprendizaje y justificación del mismo; (3) la detección de los puntos críticos y las oportunidades de decisión que faciliten la formulación de nuevas alternativas; (4) el descubrimiento de las preferencias y gustos de los actores implicados, tan necesario en la fase de retroalimentación y (5) la potenciación de los procesos de negociación y diálogo.

Esta aproximación (RPM), basada en el soporte teórico de la racionalidad procedimental y en el soporte calculista de AHP, consta de los siguientes pasos: (P1) Formulación y Descripción; (P2) Modelización; (P3) Incorporación de las preferencias. Emisión de juicios; (P4) Priorización. Agregación y Síntesis; (P5) Incertidumbre, Robustez y Retroalimentación y (P6) Explotación del modelo: Aprendizaje y Negociación.

De estas seis etapas, la segunda, tercera y cuarta reflejan fielmente la metodología del Proceso Analítico Jerárquico (véase la sección 4), mientras que las tres nuevas han sido incorporadas para recoger la filosofía subyacente en el paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio.

En el primer paso (P1), se plantea adecuadamente el problema (evitar el error tipo III). Para ello, se fijan: (1) los actores o participantes en el proceso de resolución; (2) los criterios que individualmente guían su actuación; (3) la estructura organizativa, esto es, las interdependencias entre los actores; (4) el marco global (macroentorno) en el que se encuentra inmerso el problema y (5) el conjunto de alternativas inicial.

El establecimiento de los atributos relevantes en la resolución del problema y la captación de la información (conocimiento) necesaria para la misma, suele ser una de las partes más abiertas y menos estructuradas del proceso.

En general, existen procedimientos sistemáticos que ayudan al mismo. No obstante, en la práctica, esta fase del proceso suele depender del problema particular que se esté tratando. En resumen, como sucede en cualquier aplicación real, habrá que balancear el grado de precisión y profundidad del estudio con la operatividad y aplicabilidad del mismo.

El paso quinto (P5), incorpora al modelo la incertidumbre existente en la emisión de juicios. La idea fundamental es intentar responder lo mejor posible a la realidad y profundizar en el conocimiento del proceso de decisión seguido, sin limitarse a la resolución del problema para unos valores particulares (efecto dependencia del contexto).

Los individuos, en especial al tratar problemas poco estructurados no pueden tener certeza en los juicios que reflejan la importancia relativa de las alternativas. En la mayoría de los casos se desconocen, tanto el contexto global en el que se encuentra encuadrado el problema como las consecuencias de las actuaciones. Es por ello conveniente, flexibilizar el proceso de valoración permitiendo la incorporación de incertidumbre en los juicios dentro del mismo².

El método propuesto para su realización es la utilización de diferentes distribuciones de probabilidad recíprocas asociadas a los intervalos de juicio considerados (Escobar y Moreno-Jiménez, 2000), en particular la distribución Uniforme Recíproca (Moreno y Vargas, 1991, 1993), la Triangular Recíproca (Altuzarra, Escobar y Moreno, 1996).

A partir de esas variables aleatorias, y mediante procedimientos de simulación, se obtienen las características más destacadas (recorrido, media y varianza) de las distribuciones de probabilidad de las prioridades finales. De esta forma se estudia la robustez del modelo, y se realizan las correcciones pertinentes para capturar las modificaciones de las preferencias ocurridas durante el proceso de resolución.

En el último paso (P6) se analizan las diferentes *estructuras de preferencias* que se pueden presentar, efectuando un estudio probabilístico de las mismas. Así mismo, se buscan los *puntos críticos* del proceso de decisión, y se presentan las modificaciones oportunas, en cuanto a criterios, alternativas y dependencias relevantes, para la resolución efectiva del problema.

En este apartado, se detectan diferentes *oportunidades de decisión* obtenidas en la fase de explotación del modelo, por ejemplo los *intervalos de estabilidad* asociados a los juicios, alternativas y criterios (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2000; Aguarón y otros, 2001). Estas oportunidades constituyen uno de los aspectos destacados del proceso negociador que llevan a cabo las partes implicadas para la búsqueda de una solución consensuada.

Para terminar esta parte dedicada a las “nuevas aproximaciones científicas” utilizadas en la resolución de problemas complejos, paradigmas multicriterio, resaltar que las características tradicionales del método científico como son la racionalidad, objetividad y causalidad, están siendo reemplazadas por las de rigor, accesibilidad y publicidad (Roy, 1993).

² Se recuerda que la incertidumbre del macroentorno se modelizará mediante escenarios.

3.- Fundamentos del proceso analítico jerárquico

Una vez establecido el marco de referencia (paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio) bajo el que se realiza esta presentación del Proceso Analítico Jerárquico (*the analytic hierarchy process*), en lo que sigue, se van a esbozar, someramente, los fundamentos teóricos que inspiraron la propuesta del profesor Thomas L. Saaty (Saaty, 1977, 1980), y a comentar, brevemente, algunas ideas intuitivas que subyacen en esta aproximación en la toma de decisiones.

Toda Ciencia surge de la existencia de una serie de problemas y del desarrollo consecuente de una serie de herramientas, métodos y técnicas que permiten abordar su resolución estudiando las relaciones lógicas y las conexiones causales entre entidades homogéneas³.

Cuando se quieren obtener las prioridades que un individuo asigna a un conjunto de elementos a partir de las valoraciones asignadas a los mismos según sus juicios y preferencias, es preciso establecer un conjunto de procedimientos y herramientas que permitan aprovechar el poder intrínseco de la mente para conectar las experiencias e intuiciones con los objetivos fijados.

Como señala Saaty (1994) los juicios y valores varían de un individuo a otro, por lo que se necesita una nueva ciencia de juicios y prioridades que posibilite alcanzar la universalidad y la objetividad. De esa forma se podrá comprender, cooperar y actuar.

Muchos problemas conllevan atributos, tanto físicos como psicológicos. Por físicos, entendemos lo tangible, aunque constituyan una clase de objetividad fuera de la conducta individual de medición. Por el contrario, lo psicológico corresponde a la esfera de lo intangible, incluyendo las ideas subjetivas, sentimientos y creencias de los individuos y de la sociedad en su conjunto. La pregunta es ¿existe en estos momentos una teoría coherente que pueda enfrentarse a estos dos mundos de realidad sin comprometer alguno?

En este sentido, el Proceso Analítico Jerárquico es una teoría general sobre juicios y valoraciones que, basada en escalas de razón, permite combinar lo científico y racional con lo intangible para ayudar a sintetizar la naturaleza humana con lo concreto de nuestras experiencias capturadas a través de la ciencia.

Gran parte de nuestro conocimiento y comportamiento puede explicarse en términos de comparaciones relativas expresadas en forma de ratios. De hecho los aspectos intangibles a los que por el momento no se les puede asignar directamente un valor numérico, pueden ser medidos relativamente y tener sentido en función de otras cosas que forman nuestro sistema de valores y entendemos mejor (misión, criterios y subcriterios).

En cuanto a la forma de representar la realidad, mencionar que habitualmente se usan principios de orden jerárquico para capturar y generalizar la información de los pequeños mundos al gran mundo. Además se requieren escalas de razón para poder comprender el mundo humano. Estas escalas son las que necesita el científico para crear y analizar los datos derivados de los juicios e información estadística.

El proceso de comparaciones pareadas no consiste en asignar números para ordenar las alternativas. Una cosa es asignar un número a una magnitud medible como una fracción del total, lo que se hace con aspectos tangibles como la longitud, distancia, o peso, y otra cosa, es derivar un número de las comparaciones entre intangibles homogéneos basadas en su proximidad como si no hubiera modo de conceptualizar magnitudes. El Proceso Analítico Jerárquico proporciona escalas de razón que capturan la realidad percibida, y es diferente de una asignación y normalización arbitraria de números.

³ Se entiende por entidad homogénea, a un conglomerado con similitudes o proximidades respecto a una propiedad de orden superior.

Durante mucho tiempo, en ciencia se ha supuesto que el universo entero puede describirse por un simple nivel de conglomerados homogéneos conectados por “pivotes” comunes. El resultado es una serie de fórmulas válidas en un contexto limitado (rango) aunque se considera que en la globalidad también. Se suele tender a asumir que la misma clase de lógica que aplicamos para trabajar en los pequeños mundos es válida en el gran mundo.

De estos últimos comentarios extraídos de Saaty (1994), se desprende que es necesaria una aproximación que contemple jerarquías, redes, y escalas de razón para analizar las relaciones entre los objetivos y propósitos. En este sentido, el Proceso Analítico Jerárquico permite llevar un problema multidimensional (multicriterio) a un problema en una escala unidimensional (escala de prioridades) en la que se representan las salidas globales. La síntesis de las escalas derivadas en el modelo jerárquico sólo se puede efectuar correctamente (Saaty, 1994), esto es, para obtener salidas válidas en escalas conocidas mediante la adición ponderada. En estructuras jerárquicas, estas sumas ponderadas llevan a formas multilineales y por tanto no lineales.

Al margen de estos “aspectos filosóficos” que han supuesto el punto de partida en el desarrollo de AHP, en lo que sigue, se comentan, de forma intuitiva, algunas “ideas subyacentes” en su metodología⁴, y que pueden sintetizarse en:

- (1) Utiliza jerarquías (en general redes) para formalizar el modelo mental en el modelo estructural asociado. La utilización de jerarquías y redes es algo inherente a las neuronas del cerebro (descomponer un problema complejo en partes más sencillas). Además, el uso de jerarquías o redes para representar los aspectos relevantes del problema, esto es, los escenarios, actores, criterios y alternativas, así como las interrelaciones entre los actores y las dependencias entre los factores considerados, nos da una visión más acurada a la realidad.
- (2) Utiliza conglomerados para integrar lo muy pequeño con lo muy grande. Respondiendo a consideraciones psicológicas (un aspecto esencial en la propuesta del profesor Saaty, es que siempre ha intentado reflejar el comportamiento de los individuos en la realidad), los elementos incluidos en cada conglomerado deben ser del mismo orden de magnitud (los individuos son más precisos al comparar elementos de la misma magnitud), y su número estar acotado por el conocido como número mágico de Miller, 7 ± 2 (Miller, 1956).
- (3) Utiliza comparaciones pareadas al incorporar las preferencias de los actores entre elementos. Esta forma de incorporar las preferencias (medidas relativas), necesaria al trabajar con aspectos intangibles, ha sido extendida al caso de los tangibles. En este sentido, siguiendo la práctica del ser humano, se suele tomar como unidad de referencia el elemento que posee el atributo en menor grado, y se pregunta con qué importancia, preferencia o verosimilitud el elemento que posee el atributo en mayor grado domina al otro. Evidentemente, conforme a la inclusión de juicios seguida, la matriz de comparaciones pareadas es recíproca.
- (4) Utiliza la escala fundamental propuesta por Saaty $\{1,3,5,7,9\}$ para incorporar los juicios o valoraciones del decisor. Esta escala, estrictamente positiva, permite eliminar las ambigüedades que el ser humano tiene al comparar elementos en la proximidad del cero o del infinito.

⁴ Una exposición más detallada se encuentra en el trabajo de Saaty: *The seven pillars of the analytic hierarchy process*, que puede “bajarse de la red” (<http://www.expertchoice.com>).

- (5) Desde un punto de vista calculista (Saaty, 1980), utiliza el método del autovector principal por la derecha para obtener las prioridades locales; el principio de composición jerárquico para calcular las prioridades globales y una forma lineal multiaditiva para obtener las prioridades totales. Además, a diferencia de otras técnicas multicriterio, AHP permite, dentro del propio proceso de resolución, evaluar analíticamente (matemáticamente) la consistencia del decisor a la hora de emitir los juicios.
- (6) Las prioridades derivadas vienen dadas en una escala de razón. Estas escalas son la única forma de generalizar una teoría de la decisión al caso de dependencia y retroalimentación (Saaty, 1994). En estas escalas están permitidas las multiplicaciones y las adiciones cuando los elementos pertenecen a la misma escala, como sucede con las prioridades. Más aún, como el cociente de dos números medidos en una escala de razón es un número absoluto, las escalas de razón normalizadas correspondientes a las prioridades de los elementos comparados, obtenidas según AHP, dan lugar a unos valores (números) que reflejan la dominación entre elementos en una escala absoluta, para la que tiene sentido la ponderación (multiplicación) por otros números y la adición.

4.- Metodología

Como la mayoría de las grandes ideas científicas, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP) puede considerarse, según la orientación dada al mismo, de muy diversas maneras. Su contribución es importante en niveles operativos, tácticos y estratégicos, sirviendo para mejorar la eficiencia, la eficacia y fundamentalmente la efectividad del sistema. En resumen se puede entender como:

- 1) una *técnica* que permite la resolución de problemas multicriterio, multientorno y multiactores, incorporando en el modelo los aspectos tangibles e intangibles, así como el subjetivismo y la incertidumbre inherente en el proceso de toma de decisiones.
- 2) una *teoría matemática de la medida* generalmente aplicada a la dominación de la influencia entre alternativas respecto a un criterio o atributo⁵.
- 3) una *filosofía* para abordar, en general, la toma de decisiones.

Vistas en el epígrafe anterior, las ideas intuitivas en las que se basa la filosofía del Proceso Analítico Jerárquico, y recogidos, en el Apéndice relativo a la axiomática, los fundamentos teóricos que soportan esta teoría matemática de la medida, en lo que sigue, ciñéndonos a su consideración como técnica de decisión multicriterio⁶, se incluyen las tres etapas de la metodología de AHP propuestas en su formulación inicial (Saaty, 1980): (i) modelización; (ii) valoración y (iii) priorización y síntesis.

(i) En la primera etapa (*modelización*), se construye un modelo o estructura en la que queden representados todos los aspectos considerados relevantes en el proceso de resolución (actores, escenarios, factores, elementos e interdependencias).

⁵ Habitualmente se distinguen dos tipos de dominación: directa e indirecta. En la primera, se comparan los elementos por pares para determinar cuál de los dos posee mayor intensidad de la propiedad o atributo considerado. En la segunda, se comparan los elementos por pares para determinar la dominación, respecto a la propiedad, de su influencia en un tercer elemento.

⁶ Suele considerarse dentro del conjunto de técnicas multicriterio discretas (multiatributo), con información a priori sobre las preferencias y función de agregación (valor) jerárquica.

En su formulación inicial, AHP supone cuatro axiomas⁷ (reciprocidad, homogeneidad, jerarquías y sistemas con dependencias, y expectativas) y utiliza como estructura para modelizar el problema una jerarquía, en la que los elementos de un nivel no dependían de los descendientes ni de los hermanos. En el nivel superior de la jerarquía (nivel 0) se coloca la meta global o misión considerada para el problema, y en los sucesivos niveles (1,2,3...) los demás aspectos relevantes. En el caso más sencillo de jerarquía (sólo dos niveles adicionales), se incluyen en el siguiente nivel (nivel 1) los criterios considerados, y en el último (nivel 2) las alternativas. Evidentemente este modelo simplificado puede completarse tanto como sea preciso para conseguir una representación real del problema, incluyendo para ello, diferentes niveles para los escenarios, los horizontes temporal y espacial, los actores, los criterios generales y específicos, los subcriterios, etc.

La jerarquía resultante debe ser completa, representativa (incluye todos los atributos relevantes), no redundante, y minimal (no incluye aspectos irrelevantes). Su construcción es la parte más creativa del proceso de resolución, pudiendo aparecer posiciones enfrentadas entre los distintos participantes. En este sentido, es preciso un acuerdo entre las partes implicadas antes de seguir con la resolución.

Esta forma de modelizar el problema incluye todos los aspectos relevantes en una única jerarquía. Sin embargo, cuando se dispone de suficiente información sobre el problema, es posible descomponer la jerarquía inicial en otras más detalladas o precisas (Saaty, 1994). Entre estas jerarquías suelen considerarse: una para los beneficios, otra para los costes, una tercera para los riesgos y, una última, para las oportunidades. En consonancia con la idea de separar la jerarquía global en otras más precisas, se encuentra la aproximación de AHP (AHP-B/C) conocida como análisis coste-beneficio.

Por otra parte, cuando se consideran las dependencias entre los diferentes elementos, factores y actores incluidos en el modelo, se tiene que recurrir a una modelización más general que la jerarquía, la red, que suele resolverse utilizando la técnica denominada "supermatrix" (Saaty, 1996).

En general, la modelización estructural del problema puede efectuarse en tres bloques. El superior, modelizado mediante una red, recogería la parte "menos estructurada" y desconocida del problema, incluyendo los escenarios y actores, así como sus interdependencias. El bloque intermedio, modelizado mediante una jerarquía, recogería la parte "semiestructurada" del problema, incluyendo los atributos relevantes organizados en diferentes niveles de criterios. Por último, la parte inferior del modelo estructural, modelizada mediante una jerarquía (medidas relativas) o una tabla de valoraciones (medidas absolutas), recoge la parte "más estructurada" del problema. En la práctica, suele ser una tabla de efectos correspondientes a las valoraciones de las alternativas respecto a los atributos del problema según una serie de indicadores, previamente fijados.

(ii) En la segunda etapa (*valoración*) se incorporan las preferencias, gustos y deseos de los actores mediante los juicios incluidos en las denominadas matrices de comparaciones pareadas. Estas matrices cuadradas $A=(a_{ij})$ reflejan la dominación relativa de un elemento frente a otro respecto a un atributo o propiedad en común. En particular, a_{ij} representa la dominación⁸ de la alternativa i sobre la j .

En su construcción se plasma el pensamiento y el proceder del profesor Saaty al medir aspectos intangibles. Ya se ha mencionado en varias ocasiones que, este enfoque

⁷ Véase el Apéndice: Axiomática y resultados del Proceso Analítico Jerárquico.

⁸ Dominación es un término genérico que se utiliza indistintamente con los tres conceptos habitualmente empleados: verosimilitud (para escenarios), importancia (para criterios), preferencia (para alternativas).

descriptivo con posibilidades normativas (AHP), intenta reflejar el comportamiento de los individuos a la hora de realizar comparaciones.

Cuando se dispone de una unidad de medida, o escala, para evaluar la característica considerada (aspecto tangible), los humanos suelen tomar la citada unidad y establecer el número de veces que el objeto o elemento en cuestión la contiene. En este caso las prioridades w_i de las alternativas respecto al atributo se obtienen directamente. Si no se dispone de escala para la característica considerada (aspecto intangible, o mejor dicho, por el momento intangible), lo que suelen hacer los humanos para obtener las prioridades es recurrir a procedimientos relativos, comparando los elementos entre sí de manera pareada.

En la práctica, de los dos elementos comparados, se toma como referencia el que posee en menor medida o grado la característica en estudio, y se da una medida de las veces que “el mayor” incluye, recoge, domina, es más preferido, o es más verosímil que el “menor” respecto al atributo estudiado.

Obviamente, las medidas en diferentes escalas (tangibles e intangibles) no pueden agregarse directamente. Para su tratamiento conjunto se consideran todos los aspectos como si fueran intangibles, recurriendo a las comparaciones pareadas para derivar las prioridades relativas. Cuando se dispone de una escala (aspecto tangible), se toman como juicios las razones entre las mediciones, en cambio, si no se dispone de una escala (aspecto intangible), se usan como juicio los correspondientes a las comparaciones pareadas entre los elementos considerados. Como es de esperar por el Axioma 1 (ver Apéndice), si el juicio a_{ij} es un número positivo mayor que uno (escala fundamental), su recíproco $a_{ji} = 1/a_{ij}$ es otro número positivo, pero, en este caso, menor que uno.

Saaty (1980), como ya se ha mencionado, propone la utilización de una escala fundamental para establecer los valores (juicios) correspondientes a las citadas comparaciones⁹. Considerando un rango de valores entre 1/9 y 9 evita el problema que se plantea cuando se realizan comparaciones relativas, o si se prefiere razones, entre elementos con valores que van de cero a infinito como en las fórmulas matemáticas habituales. Este rango de valores (de cero a infinito) distorsiona nuestra capacidad o habilidad perceptiva ante cambios muy pequeños o muy grandes, y no permite garantizar la acuracidad de los resultados alcanzados. Al utilizar en el proceso de cálculo las potencias de los juicios, los valores obtenidos tienden rápidamente a tomar valores fuera del rango de nuestra habilidad de interpretación de esos números.

Para lograr la acuracidad del proceso empleado, los elementos comparados deben pertenecer a grupos homogéneos (Axioma 2), o por lo menos relativamente próximos. Como señalan los psicólogos, los individuos sólo son capaces de comparar con precisión entre elementos próximos y cuando el número de los mismos es reducido (Miller, 1956).

Si los elementos tomados para efectuar sus comparaciones relativas están dispersos o separados respecto al atributo en cuestión, habrá que formar conglomerados engarzados por algún elemento común. De la misma forma, si el conjunto de alternativas que se están comparando respecto a un nodo común es elevado (superior al valor 9 del número mágico de Miller), será preciso recurrir a medidas absolutas (*ratings*) o separar el total de alternativas en grupos más pequeños (menos de 9 elementos).

En estos casos (Escobar y Moreno, 1997), se suelen “agrupar” las alternativas en sentido creciente en cuanto a la posesión del atributo, incluyendo un elemento común entre dos grupos consecutivos, que sirva de “pivot” para poder normalizar todas las prioridades locales en una única escala (*benchmarking*).

⁹ En situaciones para las que se dispone de escalas de medida apropiadas, se pueden emplear medidas directas.

Por otro lado, cuando se trabaja con problemas de gran tamaño en los que es preciso incluir un número elevado de juicios en las matrices de comparaciones pareadas, lo que hace bastante tedioso el procedimiento de valoración (emisión de juicios), o cuando no se dispone de todos los juicios considerados inicialmente en las comparaciones pareadas $[\frac{n(n-1)}{2}]$, se suele recurrir a procedimientos aproximados para obtener las prioridades locales.

Estos procedimientos estiman los juicios inexistentes de diferentes maneras (Harker, 1987; Monsuur 1996; Escobar y Moreno, 1997). No obstante, debe quedar claro que aunque las prioridades locales derivadas de una matriz recíproca de comparaciones pareadas (supuesto n elementos), se pueden obtener a partir de $(n-1)$ juicios, los valores así calculados serán meras aproximaciones. Recordemos que la redundancia presente en el método de Saaty para obtener las prioridades locales, permite mejorar la acuracidad de las estimaciones alcanzadas para las mismas.

La escala fundamental para representar las intensidades de los juicios es:

Escala numérica	Escala verbal	Explicación
1	Igual importancia	Los dos elementos contribuyen igualmente a la propiedad o criterio.
3	Moderadamente más importante un elemento que el otro	El juicio y la experiencia previa favorecen a un elemento frente al otro.
5	Fuertemente más importante un elemento que en otro	El juicio y la experiencia previa favorecen fuertemente a un elemento frente al otro.
7	Mucho más fuerte la importancia de un elemento que la del otro,	Un elemento domina fuertemente. Su dominación está probada en práctica
9	Importancia extrema de un elemento frente al otro.	Un elemento domina al otro con el mayor orden de magnitud posible

Los valores 2, 4, 6 y 8 suelen utilizarse en situaciones intermedias, y las cifras decimales en estudios de gran precisión¹⁰.

El origen "psicológico" de la escala fundamental propuesta por Saaty se encuentra en los trabajos de Weber y Fechner. Los coeficientes 1,2,3,... surgen de la ley de Weber-Fechner entre estímulos y sensaciones. Más aún, parece que la respuesta del cerebro humano al activarse las neuronas para evaluar la calidad e intensidad entre las alternativas (amplitud y frecuencia), es similar para los aspectos tangibles e intangibles.

La ley de Weber (1846) establece que para poder percibir una modificación o cambio (Δs) en cualquier estímulo (s), es preciso que éste supere un porcentaje del valor inicial (*just noticeable difference*). Esta ley es cierta cuando la variación es pequeña

¹⁰ Puede verse en Saaty (1980) como pequeñas modificaciones en los juicios llevan a pequeñas modificaciones en la escala de razón derivada.

respecto al valor del estímulo, pero suele fallar cuando el estímulo es muy grande o muy pequeño.

En 1860 Fechner, basándose en la ley de Weber, sugiere una relación geométrica para los incrementos sucesivos en los estímulos: $s_n = s_0 \alpha^n = s_0(1+r)^n = s_0(1+(\Delta s/s))^n$, y una relación aritmética para las sensaciones.

Si M indica la sensación y s el estímulo, la ley de Weber-Fechner viene dada como: $M = a \log s + b$, $a \neq 0$

Trasladando estas ideas a las comparaciones pareadas ($b=0$ con lo que $s_0=1$), las sensaciones asociadas a los sucesivos estímulos ($s_0=1$, $s_1=\alpha$, $s_2=s_0\alpha^2$,...) son: $M_0 = 0$, $M_1 = a \log \alpha$, $M_2 = 2a \log \alpha$,..., $M_n = n a \log \alpha$. De esta forma, mientras que la razón del estímulo crece geoméricamente, la respuesta al estímulo crece aritméticamente. Dividiendo las respuestas M_i por M_1 , se obtiene la secuencia de números absolutos 1,2,3,... de la escala fundamental (1-9).

El origen "pragmático" incluye entre otras consideraciones: el hecho de eliminar el cero y el infinito en el proceso de cálculo y la adecuación de esos dígitos con la tradición humana de contar con los diez dedos. Como ya se ha indicado, los humanos suelen perder precisión en sus respuestas cuando se realizan comparaciones en el entorno de esos dos valores (0 e ∞). Por otra parte, los valores {1,3,5,7,9} pueden considerarse como las marcas de clase de los intervalos (0,2], (2,4], (4,6], (6,8] y (8,10], que responden a la forma de contar más elemental (diez dedos).

Además de la justificación teórica de la escala fundamental (argumento psicológico), la efectividad de esta escala ha sido validada empíricamente aplicándola a diferentes situaciones reales con aspectos tangibles (superficie de figuras, intensidades de luz, distancias entre ciudades) para las que se ha comportado adecuadamente.

El resultado de las comparaciones pareadas es una matriz cuadrada, $A=(a_{ij})$, positiva y recíproca ($a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$)¹¹, cuyos elementos, a_{ij} , son una estimación de las verdaderas razones (w_i/w_j) entre las prioridades asociadas a los elementos comparados ($w_j, j=1, \dots, n$).

(iii) La última etapa de la metodología (*priorización y síntesis*), proporciona las diferentes prioridades consideradas en la resolución del problema: *prioridades locales*; *prioridades globales* y *prioridades totales*.

En general, se entiende por *prioridad* una unidad abstracta válida para cualquier escala en la que se integran las preferencias que el individuo tiene al comparar aspectos tangibles e intangibles.

Las prioridades locales, esto es, las prioridades de los elementos que cuelgan de un nodo común, están medidas en escalas de razón de las magnitudes relativas, y se obtienen a partir de la matriz recíproca de comparaciones pareadas.

El procedimiento matemático seguido en su obtención es el método del autovector principal por la derecha (Saaty, 1980). Este método, basado en el teorema de Perron-Frobenius, proporciona las prioridades locales resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$Aw = \lambda_{\max} w, \quad \text{con } \sum_j w_j = 1,$$

donde $A=(a_{ij})$ es la matriz recíproca de comparaciones pareadas, λ_{\max} el autovalor principal de A , y $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ el vector de prioridades locales medidas en escala de razón y

¹¹ Evidentemente, $a_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$

normalizadas para tener unicidad. En este caso, la normalización se ha efectuado aplicando el denominado modo distributivo ($\sum_j w_j = 1$)¹².

En la práctica, la solución $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ se obtiene (método de las potencias) elevando la matriz de juicios a una potencia suficientemente grande, sumando por filas y normalizando estos valores mediante la división de la suma de cada fila por la suma total. El proceso concluye cuando la diferencia entre dos potencias consecutivas sea pequeña.

Un segundo método de priorización (Aguaron y Moreno-Jiménez, 2000), ampliamente utilizado en los últimos años por sus propiedades calculistas y psicológicas, es el de la normalización (modo distributivo) de la media geométrica por filas (la raíz n -ésima del producto de los elementos de la fila). Este valor coincide con el obtenido por el método de Saaty (autovector principal por la derecha) cuando $n \leq 3$, y da valores aproximados para cualquier otro valor de $n > 3$.

Otros métodos (elementales) usados esporádicamente para obtener una solución aproximada son: el del promedio por filas de los elementos normalizados de cada columna de la matriz y la normalización de la suma de los elementos de cada fila.

Cuando se dispone de una escala, las prioridades relativas de los elementos que cuelgan de un nodo son conocidas directamente. En este caso, la matriz recíproca de comparaciones pareadas, $W = (w_i/w_j)$, queda como:

$$\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix}$$

En este caso, la matriz W anterior tiene rango uno, con lo que el problema del autovector se reduce a $Ww = nw$, con $\sum_j w_j = 1$.

Una forma sencilla de obtener el valor de λ_{\max} si se conoce el valor exacto de w (o estimación) en forma normalizada, es sumar las columnas de A y multiplicar el vector resultante por el vector de prioridades w . En general, utilizando el teorema de Perron-Frobenius, se puede probar que $\lambda_{\max} \geq n$ para el método de Saaty (Saaty, 1980).

Una de las grandes ventajas del Proceso Analítico Jerárquico es que permite relajar las hipótesis tan restrictivas que imponía el enfoque tradicional en decisión (escuela utilitarista), en concreto no exige la transitividad en las preferencias. Además, permite evaluar el grado de consistencia del decisor a la hora de introducir los juicios en las matrices recíprocas de comparaciones pareadas.

En AHP se dice que el decisor, o persona que introduzca los juicios, es consistente (véase el Apéndice para un tratamiento más riguroso del término), si la matriz de comparaciones pareadas lo es, esto es, si verifica que $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$, $\forall i, j, k$. Para evaluar la consistencia del decisor se calcula la denominada razón de consistencia (RC), un índice no estadístico (en su propuesta inicial) que viene dada como el cociente entre el índice de consistencia (IC) y el índice de consistencia aleatorio (ICA), esto es:

$$RC = IC/ICA(n)$$

¹² En determinados problemas de selección, es conveniente para solventar el problema del cambio de rango, la utilización de la normalización denominada modo ideal, que consiste en dividir cada peso w_i , obtenido al resolver el problema del autovector, por el máximo de los mismos.

donde:

$$IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{1}{n(n - 1)} \sum_{i \neq j}^n (e_{ij} - 1)$$

siendo $e_{ij} = a_{ij} w_j / w_i$ y el ICA es el índice de consistencia medio obtenido al simular aleatoriamente los juicios para las matrices recíprocas de orden n .

Los valores del Índice de Consistencia Aleatorio para los diferentes n , obtenidos mediante la simulación de 100.000 matrices (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2001), son:

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ICA	0,525	0,882	1,115	1,252	1,341	1,404	1,452	1,484	1,513	1,535	1,555	1,570	1,583	1,595

Para $n=3$, mi compañero Juan Aguarón obtuvo, mediante la enumeración de todos los juicios posibles, el valor exacto de $ICA(3) = 0,5245$.

En la práctica, suelen darse por buenas razones de consistencia inferiores al 10%¹³. Si la razón de consistencia supera ese umbral se recomienda revisar los juicios, corrigiendo aquél que más se separa de la razón dada por las prioridades relativas correspondientes (comparar a_{ij} con w_i / w_j).

Las prioridades locales obtenidas resolviendo el problema del autovector en cada uno de los nodos considerados en el problema, son transformadas en *prioridades globales*, esto es, conocida la importancia relativa, prioridad o peso de los elementos de un nivel respecto al atributo en común que sirve para compararlo, interesa determinar la importancia de esos elementos respecto a la meta global o misión fijada para el problema. La forma de transformar esas prioridades locales en globales consiste en aplicar el principio de composición jerárquica.

Denotando por $w_i(k)$ la prioridad local del elemento i en el nivel k , su prioridad global vendrá dada como $w_i(1) = w_i(k) w(k/k-1) w(k-1/k-2) \dots w(2/1)$, siendo $w(j/j-1)$ la prioridad local del elemento del nivel j considerado respecto al nodo del nivel $j-1$ usado para las comparaciones (véase el Principio de Composición Jerárquica en el Apéndice).

El proceso de cálculo termina obteniendo para cada alternativa comparada en el problema su prioridad final en el mismo. Para obtener la prioridad final o total de una alternativa se agregan las prioridades globales obtenidas para esa alternativa en los diferentes caminos que la une con la meta global (misión). El método habitualmente empleado en AHP para la agregación es el aditivo. Alternativamente (Barzilai y Golani, 1994; Kang y Stam, 1994; Lootsma, 1996, etc.), se han propuesto otros procedimientos de síntesis. El más conocido es el método de agregación multiplicativo que ha sido fuertemente criticado por la escuela de Saaty, como puede verse en el siguiente epígrafe.

5.- Puntos críticos y extensiones

5.1. Puntos Críticos

Teniendo en cuenta que hasta la fecha no se ha podido probar la dominación de una técnica multicriterio respecto a las demás, en todas ellas se pueden encontrar aspectos positivos y negativos, bien desde un punto de vista teórico o práctico. En el caso particular de AHP, como les sucede a todas las aproximaciones multicriterio discretas, existen una

¹³ En algunos problemas poco estructurados pueden darse por buenos valores inferiores al 15%.

serie de controversias en los diferentes pasos de su metodología, que todavía permanecen abiertas en la literatura¹⁴. Entre éstas cabe destacar: (1) la justificación de la independencia exigida en la modelización jerárquica (Axioma 3); (2) la escala fundamental usada para expresar los juicios relativos a las comparaciones pareadas; (3) los procedimientos de priorización (autovector), síntesis y evaluación de la consistencia empleados; (4) la interpretación de las prioridades totales obtenidas en el procedimiento y, quizá el más tratado, (5) el problema del cambio de rango.

Al margen de las “dudas procedimentales” asociadas a la metodología seguida, hay un problema de fondo (filosófico), el problema del cambio de rango (PCR), que ha llevado a profundas discusiones (véase como introducción el *Management Science* vol. 36 de 1990) entre las dos escuelas americanas más extendidas en decisión multicriterio discreta: AHP y MAUT (teoría de utilidad multiatributo).

El problema de cambio de rango (Aguarón, Escobar, Moreno, 1995a,b,c,d,e) consiste en la posibilidad de cambio de la ordenación inicial obtenida para las alternativas consideradas, al añadir o eliminar alguna alternativa “irrelevante” (copia o cuasi-copia). En cuanto a la legitimidad del cambio de rango¹⁵, Saaty (1994a) sugiere que hay dos tipos de situaciones en las que está permitido e incluso es natural: (1) en los problemas de asignación de recursos y (2) cuando la aparición de alguna copia introduce en el problema la idea de abundancia o escasez de una determinada alternativa. En esta segunda situación, se puede considerar que la introducción de una nueva alternativa lleva asociada la incorporación al modelo de un nuevo criterio (unicidad).

Al margen de los casos anteriores, la introducción de una nueva alternativa puede hacer variar la estructura de preferencias del decisor, o poner de manifiesto alguna inconsistencia en los juicios. Si la nueva alternativa es una copia de las iniciales y se mantienen los juicios emitidos con anterioridad, estas valoraciones reforzarán las relaciones marcadas por la correspondiente alternativa. En estos tres nuevos casos, puede justificarse el cambio de rango, más aún, puede considerarse esta característica como un hecho deseado de la metodología pues refleja el comportamiento real de muchos procesos de selección (Saaty y Vargas, 1984; Saaty, 1987). No obstante, hay situaciones prácticas en las que no es aconsejable que se produzca (Saaty, 1994a).

El PCR ha sido tratado en la literatura según diferentes propuestas, que pueden encuadrarse en cuatro grandes grupos o aproximaciones: (1) las que justifican el cambio de rango, al menos en determinadas situaciones (Saaty 1994a; Vargas 1994); (2) las que emplean otros modos de actuación para AHP, como son las *medidas absolutas* y la *supermatrix* (Saaty, 1980); (3) las que aplican el modo utilidad, y eliminan las copias o copias cercanas (Dyer 1990a,b); (4) las que utilizan otros procedimientos de normalización (Kang y Stam 1994; Aguarón, Escobar y Moreno, 1995c).

Las dos primeras aproximaciones han sido propuestas por el propio Saaty y sus colaboradores. La tercera por autores de la escuela utilitarista, y la última por aquellos que consideran que el PCR viene ocasionado por el procedimiento de normalización empleado. En este grupo destacan las siguientes propuestas: Modo Ideal (Belton y Gear 1985); Modo Antiideal, o normalización con el mínimo (Schoner y Wedley, 1989; Schoner, Wedley y Choo, 1993); AHP Referenciado (Schoner y Wedley, 1989); y *Linking Pins* (Schoner, Wedley y Choo, 1993).

¹⁴ Véanse Dyer (1990a, 1990b), Forman (1990, 1992), Saaty (1987, 1990), Saaty y Vargas (1984), Schoner y Wedley (1989), Schoner, Wedley y Choo (1992).

¹⁵ Véanse Schenkerman (1994) y Vargas (1994).

Respecto a los otros tópicos citados dentro de los aspectos controvertidos, mencionar que se han propuesto distintos procedimientos para calcular y sintetizar las prioridades (Aguarón, Escobar y Moreno, 1995a), así como diferentes escalas para incorporar las preferencias a través de juicios (Lootsma, 1989; Holder, 1990; Finan y Hurley, 1999).

Aguarón y Moreno-Jiménez (2001) justifican, basándose en consideraciones calculistas y psicológicas, la utilización de la media geométrica como procedimiento de priorización. Además, proponen una medida de consistencia específica para este método de priorización, el Índice de Consistencia Geométrico, que viene dado como:

$$ICG = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i < j} \log^2 e_{ij}$$

Para una razón de consistencia de Saaty igual al 10% (RC=0,10), los valores del ICG asociados vienen dados (Aguarón y Moreno-Jiménez, 2001) por:

$$ICG(n=3) = 0,3147; ICG(n=4) = 0,3526 \text{ e } ICG(n>4) \approx 0,370.$$

En cuanto a la existencia de otros procedimientos de síntesis, el más extendido es el denominado forma multiplicativa ponderada (Saaty, 1980). Saaty afirma que este último procedimiento presenta cuatro grandes limitaciones: (a) no devuelve valores en la misma escala de medida; (b) supone que siempre la matriz de juicios es consistente; (c) no generaliza el caso de interdependencia y retroalimentación; (d) siempre preserva el ranking de la alternativas. Obviamente, la bondad o debilidad de los diferentes procedimientos propuestos depende, en gran parte, de los fines perseguidos (filosofía) por las correspondientes escuelas.

Respecto a la justificación de la independencia entre “hermanos” (axioma 3) exigida en la metodología para poder realizar la modelización jerárquica, al igual que sucede en otras técnicas multicriterio no es sencilla. En AHP la independencia se justifica por la forma de modelizar y valorar seguida. Saaty (1994, pág. 124-5) sugiere que la independencia es capturada en la comparación. Cuando se pregunta sobre la dominación entre un par de elementos con respecto a un atributo o propiedad, se intenta capturar que cantidad de esa propiedad tiene un elemento y no el otro, incluso aunque ambos elementos se superpongan. El resultado es dar un valor relativo de la propiedad en ambos elementos, aunque se solapen. Sumando en todos los elementos se obtiene la suma de la presencia relativa de la propiedad en todos los elementos considerados.

Hay otro punto cuestionado en la modelización jerárquica efectuada en AHP, como es la influencia que el número de descendientes de cada nodo tiene en la prioridad final de los elementos considerados. Si todas las alternativas son evaluadas en función de todos los subcriterios este problema no suele presentarse pues cada alternativa alcanzaría su proporción, o parte de la unidad, que se distribuye a lo largo de la jerarquía. En cambio, si las alternativas son evaluadas en función de parte de los subcriterios este problema puede afectar al resultado final. Para evitarlo se sugiere efectuar lo que se denomina un *ajuste estructural* de las prioridades, esto es, reescalar el peso de los criterios con el número relativo de elementos bajo el mismo.

5.2. Extensiones

Al margen de su propuesta inicial (medidas relativas), el Proceso Analítico Jerárquico permite alcanzar medidas absolutas. En esta opción, denominada “ratings”, se trabaja de forma muy parecida al caso de medidas relativas. La única diferencia es que en el nivel inferior de la jerarquía se colocan, en vez de las alternativas, las modalidades o

niveles considerados para cada uno de los subcriterios o atributos incluidos en el mismo. La importancia de estas modalidades se obtiene como en el caso de las medidas relativas, y el valor o prioridad final de cada alternativa se alcanza sumando los pesos de las valoraciones dadas a cada modalidad.

Para evitar la dependencia del número de niveles (modalidades) considerado para cada atributo, se utiliza la normalización con el modo ideal. En este caso, la prioridad local de cada nivel se obtiene como la parte de la prioridad correspondiente al nivel ideal, esto es, al nivel de mayor prioridad o peso en la comparación relativa¹⁶.

La utilización de medidas absolutas está recomendada cuando se tiene un número elevado de alternativas, y se dispone de experiencia previa para poder establecer las modalidades de los atributos considerados. Las medidas relativas se emplean fundamentalmente cuando el número de alternativas es más reducido (7 ± 2), se dispone de un mayor conocimiento del problema, y se desea un estudio con mayor detalle. En el caso de medidas relativas las redundancias cometidas al introducir los $n(n-1)/2$ juicios permiten una ratificación en los juicios emitidos.

En general, las medidas absolutas se suelen emplear con fines normativos, mientras que las relativas con fines descriptivos. No obstante, conforme al paradigma de racionalidad procedimental multicriterio propuesto, en la resolución de problemas reales se suelen combinar las dos medidas. En primer lugar, utilizando medidas absolutas, se detectarán a partir de los “datos empíricos” disponibles, las alternativas, atributos, subcriterios, criterios, escenarios, y, en general, los elementos relevantes. Estos elementos serán, a su vez, estudiados (cuando la ocasión lo requiera) con mayor profundidad mediante medidas relativas. Además, si se dispone de un número elevado de alternativas, o no se puede suponer homogeneidad entre los elementos comparados, será preciso recurrir a la utilización de conglomerados y al empleo de procedimientos para su integración.

En medidas absolutas, el ajuste estructural que en medidas relativas se alcanzaba multiplicando la prioridad de cada criterio por el número relativo de subcriterios que cuelgan de él y posteriormente normalizando a la unidad los pesos de los criterios resultantes, se realiza directamente con el procedimiento de normalización seguido (modo ideal o normalización con el máximo).

Siguiendo con las extensiones consideradas para AHP, cabe destacar algunas líneas seguidas en los últimos años:

- (1) El Proceso Analítico Sistémico (The Analytic Network Process –ANP–), donde se permite la dependencia entre los elementos. En este caso, para calcular las prioridades se utiliza la técnica denominada “supermatrix” (Saaty, 1996).
- (2) La Decisión en Grupo, donde la agregación de los juicios entre actores, así como la agregación de las prioridades de los mismos, se efectúa utilizando la media geométrica.
- (3) Incorporación de la incertidumbre mediante intervalos de juicio (Moreno-Jiménez y Vargas, 1991, 1993) y las distribuciones recíprocas (Escobar y Moreno-Jiménez, 2000).
- (4) Juicios dinámicos, donde se contempla la extensión de AHP al caso continuo mediante ecuaciones integrales de Freedholm (Saaty, 1994).
- (5) Explotación del modelo, en la que se desarrollan distintas herramientas decisionales como son las estructuras de preferencia y los intervalos de estabilidad, utilizadas para detectar los puntos críticos del proceso y diseñar caminos de consenso que favorezcan

¹⁶ Otros procedimientos de normalización pueden verse en Aguarón y Moreno (1995a,d).

los procesos negociadores y la resolución de conflictos entre los actores participantes (Moreno-Jiménez y otros, 1999).

- (6) Psicología del conocimiento, donde se intenta modelizar el comportamiento de las neuronas del cerebro humano (impulsos), mediante jerarquías y redes.

Hasta ahora, se ha hablado de un uso “independiente” y “autónomo” de AHP, aunque son muchas las situaciones reales en las que esta técnica se ha utilizado en combinación con otras, por ejemplo, su utilización al determinar la parte subjetiva de los pesos empleados en programación por compromiso y programación por metas¹⁷.

Para concluir el apartado de extensiones de AHP, me gustaría señalar que, utilizando el pesar esperado (*expected regret*) como elemento de enganche, Escobar y Moreno-Jiménez (2001) han “conectado” el Proceso Analítico Jerárquico con la Programación por Compromiso.

La búsqueda de una teoría unificada para las diferentes escuelas multicriterio que permita, entre otras cosas, una mejor comprensión de los fundamentos teóricos de las mismas, está siendo objeto de gran atención en los últimos años (Escobar y Moreno, 1997; Moreno y Escobar 2000; Romero, 2000). En este sentido, me gustaría volver sobre uno de los problemas mencionados en la introducción, cuya solución sigue pendiente: ¿Qué técnica multicriterio es mejor?

Personalmente, y aunque mi intención a lo largo del trabajo no ha sido la de glosar las ventajas de AHP, creo que esta técnica multicriterio, además de ser una de las pocas que ofrece una verdadera axiomatización teórica (ver apéndice), es una de las que mejor comportamiento práctico tiene.

No obstante, hay que ser consciente de las posibles limitaciones que presenta y utilizarla, al igual que las restantes técnicas, en el contexto y con la orientación apropiada para que pueda ser aprovechada de manera efectiva. En este sentido, es imprescindible un apropiado conocimiento de sus fundamentos teóricos, así como de sus aspectos más controvertidos y sus posibles causas.

6.- Aplicaciones

El Proceso Analítico Jerárquico es una de las técnicas multicriterio con mayor implantación práctica en casi todos los ámbitos de la toma de decisiones. Sin entrar a estudiar con detalle cuáles son las causas que han motivado su gran aplicabilidad, mencionar que, entre éstas, cabe citar las mismas ideas que sugirieron su metodología, esto es: la flexibilidad de la técnica; la adecuación a numerosas situaciones reales referidas, fundamentalmente, a la selección multicriterio entre alternativas; su facilidad de uso; la posibilidad de aplicarla en decisión individual y en grupo, y, por último, la existencia de software amigable para su aplicación (Expert Choice) desde hace unos quince años.

La extensa bibliografía relativa a las aplicaciones de AHP en la toma de decisiones, hace inviable una exposición detallada de la misma. Por ello, este trabajo de “revisión” se limita, para no extender excesiva e innecesariamente el contenido del mismo, a citar algunos de los tópicos tratados mediante AHP, a recoger algunas referencias bibliográficas de carácter general (libros y Actas de los Simposium Internacionales sobre AHP –ISAHP-) ¹⁸ y a citar unos pocos artículos de los aparecidos recientemente.

¹⁷ Un tratamiento más amplio de este uso puede verse en los Proceeding del 3er. Symposium Internacional sobre AHP (Washington).

¹⁸ Las Actas de los ISAHP celebrados desde 1988, pueden adquirirse en <http://www.expertchoice.com>

Tópicos:

- Sociedad, Ciencia, y Educación (1er. ISAHP, 3er. ISAHP y 4º ISAHP).
- Economía y Transporte (1er. ISAHP y 4º ISAHP).
- Localización y Asignación de recursos (1er. ISAHP)
- Evaluación de alternativas (1er. ISAHP y 2º ISAHP).
- Decisiones Empresariales. Marketing (2º. ISAHP y 4º ISAHP).
- Producción (3er. ISAHP).
- Aplicaciones Ambientales (2º. ISAHP y 4º ISAHP).
- Planificación Urbana (2º. ISAHP).
- Sector Público (3er. ISAHP).
- Sanidad (3er. ISAHP).
- Evaluación de Sistemas (3er. ISAHP).
- Decisión en Grupo y Resolución de Conflictos Internacionales (3er. ISAHP).
- Nuevas Tecnologías (4º. ISAHP).
- Combinación de AHP con otras técnicas multicriterio (4º. ISAHP).
- Pensamiento y Ética (4º. ISAHP).

Aplicaciones aparecidas en los últimos años:

- Priorización Ambiental (Moreno-Jiménez y otros, 1999).
- Selección de personal en sistemas de telecomunicación (Tam y Tummala, 2001).
- Administración de Operaciones (Partovi y otros, 1989).
- Toma de Decisiones Descentralizadas (Bolloju, 2001).
- Evaluación de Software (Ossadnik y Lange, 1999).
- Benchmarking (Frei y Harker, 1999).
- Defensa (Ching-Hsue Cheng y otros, 1999).
- Decisión en grupo (Van Den Honert y Lootsma, 1997; Easley y otros, 2000).
- Gestión Universitaria (Gkwak y Changwon, 1998).
- Desarrollo de software (Lee y otros, 1999).

SIMPOSIUM INTERNACIONALES SOBRE AHP (ISAHP)

- Primer *ISAHP* (1988) celebrado en Tiajim (China).
- Segundo *ISAHP* (1991) celebrado en Pittsburg (USA).
- Tercer *ISAHP* (1994) celebrado en Washington (USA).
- Cuarto *ISAHP* (1996) celebrado en Vancouver (Canada).
- Quinto *ISAHP* (1999) celebrado en (Japón).
- Sexto *ISAHP* (2001), que se celebrará en Berna (Suiza).

MONOGRÁFICOS EN DISTINTAS REVISTAS CIENTÍFICAS:

HARKER, P.T. (ed.) (1986): The Analytic Hierarchy Process. *Socio Economic Planning Sciences* 20(6).

VARGAS, L.G.; SAATY, R.W.(eds.) (1987): The Analytic Hierarchy Process. Theoretical Developments and some applications. *Mathematical Modelling* 9(3-5).

VARGAS, L.G.; WHITAKER, R.W. (eds) (1990): Decision Making by the Analytic Hierarchy Process: Theory and Applications. *European Journal of Operational Research* 48(1).

WASIL, E.A.; GOLDEN, B.L. (eds.) (1991): Public Sector Applications of the Analytic Hierarchy Process. *Socio Economic Planning Sciences* 25(2).

VARGAS, L.G.; ZAHEDI, F. (eds.) (1993): Analytic Hierarchy Process. *Mathematical and Computer Modelling* 17(4-5).

Libros:

SAATY, T.; ALEXANDER, J.M. (1989): Conflict Resolution: The Analytic Hierarchy Approach. Praeger.

DYER, R.B.; FORMAN, E. (1991): *An Analytic Approach to Marketing Decisions*. Prentice Hall Inc.

SAATY, T.; VARGAS, L.G. (1991): *Prediction, Projection and Forecasting*. Kluwer Academic Publishers..

SAATY, T.; VARGAS, L.G. (1994): *Decision Making in Economic, Political, Social and Technological Environments*. Vol. VII, AHP Series. RWS Publications.

DYER, R.B.; FORMAN, E.; FORMAN, G; JOUFLAS, G. (1996): *Cases Studies in Marketing Decisions Using AHP*. Expert Choice Inc. Pittsburg.

SAATY, T.L. (1997): *Toma de Decisiones para Líderes*. RWS Publications.

7.- Conclusiones

La complejidad de los problemas de decisión tratados bajo el denominado paradigma multicriterio ha favorecido la aparición de numerosas escuelas de pensamiento y, con ello, de muy diversas metodologías.

Por el momento, no se ha podido probar la supremacía de alguna de estas escuelas o filosofías sobre las restantes. Más aún, está resultando difícil combinar simultáneamente la validez teórica de las aproximaciones con su adecuación práctica.

Como se ha vuelto a poner de manifiesto en el intenso e interesante debate acaecido a lo largo de las últimas semanas en el foro de discusión multicriterio, la brecha existente entre la teoría y la práctica en el campo multicriterio, sigue abierta e incluso aumentando. Parece que rigor y aplicabilidad son dos conceptos enfrentados, algo que no debería suceder, ni deberíamos consentir.

En este sentido, antes de presentar los contenidos específicos de la aproximación metodológica propuesta por el profesor Saaty (aspecto informativo), se pone de manifiesto cuál es la filosofía que subyace en el desarrollo teórico de esta técnica y el marco, o paradigma decisional, que debe guiar su utilización para poder aprovechar toda su potencialidad operativa (aspecto formativo).

Cuando estamos inmersos en la Era del Conocimiento (siglo XXI), he preferido comenzar la presentación de este trabajo centrándome en los aspectos formativos (paradigmas multicriterio) y seguirla con la exposición los aspectos informativos (fundamentos teóricos, metodología y aplicaciones).

Entendiendo por *Formación* la capacidad de transformar Información en Conocimiento, y por *Conocimiento* la aplicación de la Información en un dominio específico (uso de la información en un ámbito determinado), es evidente que el uso de la información con una determinada finalidad requiere una interpretación de la misma que es personal y, por lo tanto, subjetiva e intangible.

Si se pretende reducir la brecha existente entre la teoría y la práctica, esto es, utilizar aproximaciones metodológicas efectivas, es necesario combinar el rigor y la objetividad de la ciencia tradicional con el realismo y la subjetividad del comportamiento humano. En este sentido, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP) conjuga perfectamente un

fundamento axiomático clásico (Saaty, 1986), basado en la teoría matemática de la dominación (objetividad del método científico tradicional), con una excelente adecuación al comportamiento real de los individuos y sistemas en la toma de decisiones (subjetividad conductivista).

Para conseguir esa sintonía entre la fundamentación teórica y la idoneidad práctica, la aplicación del Proceso Analítico Jerárquico se ha enmarcado bajo un paradigma más abierto y flexible que el clásico de la racionalidad sustantiva, el denominado paradigma de la racionalidad procedimental multicriterio.

Bajo este prisma, la metodología seguida se ha orientado hacia el constructivismo cognitivo, esto es, intenta mejorar el conocimiento existente del proceso decisional. De esa forma, las valoraciones (juicios) incorporadas por los actores en el proceso de resolución, serán más acuradas y permitirán que las prioridades derivadas al aplicar AHP capturen el conocimiento del problema necesario para una toma de decisiones efectiva.

Para concluir este trabajo, se han recogido una serie de aspectos controvertidos de esta metodología desde un punto de vista teórico. No obstante, debe quedar claro que, como ocurre con otras aproximaciones multicriterio, gran parte de las debilidades que se les imputa, provienen del desconocimiento de los fundamentos teóricos en los que se basan y, de ahí, de una incorrecta aplicación de las mismas.

En síntesis, centrándonos en la parte informativa de esta presentación, recordar (Saaty, 1996) que el objeto del Proceso Analítico Jerárquico es trasladar las percepciones humanas, con su limitación en cuanto al rango, a valores numéricos con sentido evaluados en una escala de razón (prioridades).

Para ello, combina una modelización jerárquica de los problemas, las comparaciones pareadas entre elementos correspondientes a conglomerados homogéneos y reducidos (pequeño número de elementos), la utilización de una escala fundamental para capturar la realidad percibida, el cálculo de las prioridades locales mediante la resolución del problema del autovector principal por la derecha y una síntesis multiaditiva para obtener las prioridades totales.

El resultado es un conjunto de prioridades finales (totales), esto es, una serie de valores numéricos evaluados en una unidad abstracta de medida (prioridades), que permiten sintetizar lo tangible y lo intangible, lo objetivo y lo subjetivo, lo racional y lo emocional en una escala de razón válida para la toma de decisiones.

Agradecimientos:

Quiero expresar el reconocimiento más sincero a mis compañeros, los profesores Juan Aguarón y María Teresa Escobar, pues muchos de los resultados y conclusiones aquí expresados provienen de trabajos efectuados conjuntamente.

8.- Referencias

- [1] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995a): Normalización y cambio de rango en AHP. *Actas de las Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada*, Jaca.
- [2] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995b): Inconsistencia y Cambio de rango en el proceso analítico jerárquico. *Actas de las Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada*, Jaca.

- [3] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995c): El Cambio de Rango en el Proceso Analítico Jerárquico. *Actas del XXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Sevilla, 381-382.
- [4] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995d): Robustez de los procedimientos de normalización en el Proceso Analítico Jerárquico. *Actas del XXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Sevilla, 659-660.
- [5] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1995e): La Programación Jerárquica por Compromiso. El cambio de rango. *Actas del XXII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Sevilla, 379-380.
- [6] AGUARÓN, J.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2000): Local Stability Intervals in the Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research* 125(1), 114-133.
- [7] AGUARÓN, J.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2001): The Geometric Consistency Index. Approximated Thresholds (en evaluación).
- [8] AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2001): Consistency Stability Intervals for a judgement in AHP Decision Support Systems (en evaluación).
- [9] ALTUZARRA, A.; ESCOBAR, M.T.; MORENO, J.M. (1996): Estudio probabilístico en el Proceso Analítico Jerárquico. *Actas de la X Reunión ASEPELT-España*. Albacete (CD).
- [10] BARREDO, J.I. (1996): *Sistemas de Información Geográfica y Evaluación Multicriterio en la ordenación del territorio*. Rama. Madrid.
- [11] BARZILAI, J.; GOLANI, B. (1994): AHP rank reversal, normalization and aggregation rules. *INFOR*, 32(2), 57-64.
- [12] BELTON, V.; GEAR, T. (1985): The legitimacy of Rank Reversal. *Omega* 13, 3, 143-144.
- [13] BOLLJU, N. (2001): Aggregation of analytic hierarchy process models on similarities in decision makers' preferences. *European Journal of Operational Research* 128, 499-508.
- [14] CHECKLAND, P.; SHOLES, J. (1990): *Soft System Methodology in Action*. Wiley. Chichester.
- [15] CHING-HSUE CHENG; KUO-LUNG YANG; CHIA-LUNG HWANG (1999): Evaluating attack helicopters by AHP based on linguistic variable weight, *European Journal Of Operational Research* 116(2), 423-435.
- [16] COLSON, G.; DE BRUIN, C. (1989): Models and Methods in Multiple Objective Decision Making. In G. Colson; C. De Bruin (Eds.): *Models and Methods in Multiple Criteria Decision Making*. Pergamo, London.
- [17] DE TOMBE, D.J. (2001): Methodology for handling complex societal problems, Editorial, *European Journal Of Operational Research* 128, 227-230.
- [18] DYER, J.S. (1990a): Remarks on the Analytic Hierarchy Process. *Management Science* 36 (3), 249-258.
- [19] DYER, J.S. (1990b): A clarification of "Remarks on the Analytic Hierarchy Process". *Management Science* 36 (3), 274-275.
- [20] EASLEY, R. F.; VALACICH, J.S.; Venkataramanan, M.A. (2000): Capturing group preferences in a multicriteria decision, *European Journal Of Operational Research* 125(1). 73-83.
- [21] EASTMAN, J. (1993): *IDRISI. A grid based geographic analysis system*. Version 4.1. Clark University, Graduate School of Geography, Worcester. MA.

- [22] ESCOBAR, M.T.; MORENO JIMENEZ, J.M. (1997): El Proceso Analítico Jerárquico en problemas con un gran número de alternativas. *Estudios de Economía Aplicada* 8, 25-40.
- [23] ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2000): Reciprocal distributions in the Analytic Hierarchy Process. *European Journal of Operational Research* 123(1), 154-174.
- [24] ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (2001): A linkage between the Analytic Hierarchy Process and the Compromise Programming Models (en evaluación).
- [25] FINAN, J.S.; HURLEY, W.J. (1999): Transitive calibration of the AHP verbal scale. *European Journal of Operational Research* 112, 367-372.
- [26] FORMAN, E.H. (1990): AHP is intended for more than expected value calculations. *Decision Science* 21, 670-672.
- [27] FORMAN, E.H. (1992): Facts and fictions about the analytic hierarchy process. In Multiple Criteria Decision Making. Proc. Ninth Int. Conf. *Theory and Applications in Business, Industry, and Government* (Edited by A. Goicochea, L. Duckstein and S. Zionts), 123-133. Springer, New York.
- [28] FREI, F.X.; HARKER, T. (1999): Measuring aggregate process performance using AHP. *European Journal Of Operational Research* 116(2), 436-442.
- [29] FUNTOWICZ, S.; RAVETZ, J.R. (1991): A new scientific methodology for global environmental issues. In R. Constanza (Ed.): *Ecological Economics: The Science and Management of Sustainability*. Columbia University Press. NY., 137-152.
- [30] FUNTOWICZ, S.; RAVETZ, J.R. (1994): The worth of a songbird ecological economics as a postnormal science. *Ecological Economics*, 10(3), 197-207.
- [31] GANDY, M. (1996): Crumbling land: the postmodernity debate and the analysis of environmental problems. *Prog. Hum. Geogr.* 20 (1), 23-40.
- [32] KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. (1979): Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica* 47, 263-291.
- [33] HARKER, P.T. (1987): The incomplete pairwise comparison in the Analytic Hierarchy Process. *Mathematical Modelling* 9, 837-848.
- [34] HARVEY, (1989): *The condition of postmodernity: An inquiry into the Origins of Cultural Change*. Blakwell, Oxford.
- [35] HOLDER, R.D. (1990): Some Comments on the Analytic Hierarchy Process. *J. Opl. Res. Soc.* 41(11), 1073-1076.
- [36] KANG, M.; STAM, A. (1994): PAHAP: A pairwise aggregated hierarchical analysis of ratio scale preferences. *Decision Science* 25, 4, 607-624.
- [37] KAUFMAN, B.E. (1999): Emotional arousal as a source of bounded rationality. *Journal of Economics Behaviour & Organization* 38, 135-144.
- [38] KEENEY, R. (1992): Value focused thinking. Harvard University Press.
- [39] KWAK, N.K.; CHANGWON, L. (1998): A multicriteria decision-making approach to university resource allocations and information infrastructure planning, *European Journal Of Operational Research* 110(2), 234-242.
- [40] LEE, M.; PHAM, H.; ZHANG, X. (1999): A methodology for priority setting with application to software development process, *European Journal Of Operational Research* 118(2), 375-389.
- [41] LICHTENSTEIN, S.; SLOVIC, P. (1971): Reversal of Preferences Between Bids and Choices in Gambling Decisions. *J. of Experimental Psychology* 89, 46-55.

- [42] LOOTSMA, F. A. (1989): Conflict resolution via pairwise comparison of concessions. *European Journal of Operational Research* 40, 109-116.
- [43] LOOTSMA, F.A. (1996): A model for the relative importance of the criteria in the multiplicative AHP and SMART. *European Journal of Operational Research* 94, 467-476.
- [44] MIDMORE, P. (1996): Towards a postmodern agricultural economics. *J. Agric. Econom.* 47(1), 1-17.
- [45] MILLER, G.A (1956): The magical number seven, plus or minus two. Some limits on our capacity for processing information. *The Psychological Review* 63, 81-97.
- [46] MONSUUR, H. (1996): An intrinsic consistency threshold for reciprocal matrices. *European Journal of Operational Research* 96, 387-391.
- [47] MORENO JIMÉNEZ, J.M. (1993): *Investigación Operativa*. Ed. Gore.
- [48] MORENO JIMÉNEZ, J.M. (1996): Metodología Multicriterio en el Plan Nacional de Regadíos (privado).
- [49] MORENO JIMENEZ, J.M. (1997): Priorización y toma de decisiones ambientales. Actas del 1er. Encuentro Iberoamericano de Evaluación y Decisión Multicriterio, 113-145. Santiago de Chile.
- [50] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARON, J.; CANO, F.J.; ESCOBAR, M.T. (1998): Validez, Robustez y Estabilidad en Decisión Multicriterio. Análisis de Sensibilidad en el Proceso Analítico Jerárquico. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, vol. 92(4), 387-397.
- [51] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T. (2001): Metodología científica en valoración y selección ambiental. Aparecerá en *Pesquisa Operacional* (Revista de la Sociedad Brasileña de Investigación Operativa).
- [52] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARON, J.; ESCOBAR, M.T.; TURON, A. (1999): Multicriteria Procedural Rationality on SISDEMA. *European Journal of Operational Research* 119(2), 388-403.
- [53] MORENO JIMÉNEZ, J.M.; ESCOBAR, M.T. (2000): El Pesar en el Proceso Analítico Jerárquico. *Estudios de Economía Aplicada* 14, 95-115.
- [54] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; MATA, E.J. (1992): Nuevos sistemas informáticos de ayuda a la decisión. Sistemas Decisionales Integrales. *Actas de la V Reunión ASEPELT-España*, Granada, vol. II, 529-538.
- [55] MORENO-JIMENEZ, J.M.; VARGAS, L.G. (1991): Intervalos de Juicio en el Proceso Analítico Jerárquico. *Actas de la IV Reunión ASEPELT España*, Las Palmas.
- [56] MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; VARGAS, L.G. (1993): A Probabilistic Study of Preference Structures in the Analytic Hierarchy Process with Interval Judgment. *Mathematical and Computer Modelling*, 17, 4-5, 73-81.
- [57] NIDJKAM, P.; VAN DELFT, A. (1977): *Multicriteria Analysis and Regional Decision Making*. Martinus Nijhoff, Leiden.
- [58] OSSADNIK, W.; LANGE, O. (1999): AHP-based evaluation of AHP software. *European Journal of Operational Research* 118, 578-588.
- [59] PARTOVI, FY.; BURTON, J.; BANERJE, A. (1989): Application of analytic hierarchy process in operations management. *International Journal of Operations and Production Management* 10(3), 5-19.
- [60] RIDGLEY, M.A.; RIJSBERMAN, F.R. (1992): Multicriteria evaluation in a policy analysis of the rhine stuary. *Water Resources Bulletin* 28, 1095-1110.

- [61] ROMERO, C. (1993): *Teoría de la Decisión Multicriterio. Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Alianza Universidad Textos.
- [62] ROMERO, C. (2000): Extended lexicographic goal programming: a unifying approach. *Omega* 29, 63-71.
- [63] ROY, B. (1993): Decision science or decision-aid science? *European Journal of Operational Research* 66, 184-203.
- [64] SAATY, T.L. (1977): A scaling method for priorities in herarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, 15, 234-281.
- [65] SAATY, T.L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, New York.
- [66] SAATY, T.L. (1986): Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process. *Management Science* 32(7), 841- 855.
- [67] SAATY, T.L. (1987): Rank generation, preservation and reversal in teh analyticy hierarchy process. *Decison Science* 18, 157-177.
- [68] SAATY, T.L. (1990): An exposition of the AHP. In reply to the paper "Remarks on the analytic hierarchy process". *Management Science* 36(3), 259-268.
- [69] SAATY, T.L. (1994): *Fundamentals of Decision Making*. RSW Publications.
- [70] SAATY, T.L. (1994a): How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process. *Proceedings of the 3th. ISAHP*, vii-xxviii.
- [71] SAATY, T.L. (1996): *The Analytic Network Process*. RSW Publications.
- [72] SAATY, T.L.; VARGAS, L.G. (1984): The legitimacy of rank reversal. *Omega* 12, 513-516.
- [73] SAVAGE, L.J. (1954): *The Foundations of Statistics*. John Wiley and Sons. New York.
- [74] SCHENKEMAN, S. (1994): Avoiding rank reversal in AHP decision support models. *European Journal of Operational Research* 74, 407-419.
- [75] SCHOENER, B.; WEDLEY, W.C. (1989): Ambiguous criteria weights in AHP. *Decision Science* 20, 462-475.
- [76] SCHOENER, B.; WEDLEY, W.C.; CHOO, E.U. (1992): A rejoinder to Forman on AHP, with emphasis on the requirement of composite ratios scales. *Decision Science* 23, 509-517.
- [77] SCHOENER, B.; WEDLEY, W.C.; CHOO, E.U. (1993): A unified approach to AHP with linking pins. *EJOR* 64, 384-392.
- [78] SIMON, H.A. (1964): Rationality. In J. Gould y W.L. Kolb (Eds). *A Dictionary of the Social Science*. The Free Press, Glencoe, IL.
- [79] SIMON, H.A. (1972): Theories of bounded rationality. In C. B. Radner y R. Radner (eds.): *Decision and Organization*. North Holland Publishing Company. Amsterdam.
- [80] SÖDERBAUM, P. (1999): Values, ideology and politics in ecological economics. *Ecological Economics* 28, 161-170.
- [81] TACCONI, L. (2000): *Biodiversity and Ecological Economics*. Earthscan.
- [82] TAM, C.Y.; TUMMALA, V.M.R. (2001): An application of the AHP in vendor selection of telecommunications system. *Omega* 29, 171-182.
- [83] TVERSKY, A. (1988): A rational choice and the framing of decisions. In D.E. Bell; H. Raiffa, & A. Tversky (Eds.), *Decision making: Descriptive, normative, and prescriptive interactions*. Cambridge University Press.
- [84] TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. (1972): Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, *Science* 185, 1124-1131.

- [85] VAN DEN HONERT, R.C.; LOOTSMA, F.A. (1997): Group preference aggregation in the multiplicative AHP, *European Journal of Operational Research* 96(2), 363-370.
- [86] VARGAS, L.G. (1994): Reply to Schenkeman's avoiding rank reversal in AHP decision support models. *European Journal of Operational Research* 74, 420-425.
- [87] VON NEWMANN, J. y MORGESTERN, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princenton University Press.
- [88] VOOGD, H. (1983): *Multicriteria Evaluations for Urban and Regional Planning*. Pion. London.

APÉNDICE

Axiomática del proceso analítico jerárquico (AHP)

En lo que sigue se incluyen algunos conceptos y resultados correspondientes a la formalización matemática del Proceso Analítico Jerárquico (AHP). Su desarrollo pormenorizado puede verse en cualquiera de las referencias en las que se recoge la fundamentación teórica de AHP (Saaty, 1980; 1986; 1994).

Sea A un conjunto finito de n elementos llamados alternativas. Sea C un conjunto de propiedades o atributos con respecto a los que se comparan los elementos de A . Normalmente nos referiremos a los elementos de C como criterios.

Cuando se comparan dos elementos de A con respecto a un criterio en C , se dice que se realiza una comparación binaria. Sea $>_{\sim C}$ una relación binaria en A que represente "más preferido que o indiferente a" con respecto al criterio C en C .

Sea B el conjunto de las aplicaciones desde $A \times A$ en R^+ (conjunto de los reales positivos). Sea $f: C \rightarrow B$. Sea $P_C \in f(C)$ para $C \in C$. P_C asigna un valor real positivo a cada par $(A_i, A_j) \in A \times A$. Sea $P_C(A_i, A_j) = a_{ij} \in R^+$, $A_i, A_j \in A$. Para cada $C \in C$, la tripleta $(A \times A, R^+, P_C)$ es una escala primitiva o fundamental. Una escala fundamental es una aplicación de objetos en un sistema numérico.

Definición 1.- Para todo $A_i, A_j \in A$ y $C \in C$

$$A_i >_C A_j \text{ si y sólo si } P_C(A_i, A_j) > 1$$

$$A_i \sim_C A_j \text{ si y sólo si } P_C(A_i, A_j) = 1$$

Si $A_i >_C A_j$ se dice que A_i domina a A_j con respecto a $C \in C$. P_C representa la intensidad o fuerza de la preferencia de una alternativa sobre otra.

Axioma 1.- (Reciprocidad) Para todo $A_i, A_j \in A$ y $C \in C$, se tiene:

$$P_C(A_i, A_j) = 1/P_C(A_j, A_i).$$

Sea $A = (a_{ij}) = (P_C(A_i, A_j))$ el conjunto de comparaciones pareadas de las alternativas con respecto al criterio $C \in C$. Por el Axioma 1, A es una matriz recíproca positiva. El objetivo es obtener una escala de dominación relativa (u ordenación) de las alternativas a partir de las comparaciones pareadas dadas en A .

Sea $R_{M(n)}$ el conjunto de las matrices $n \times n$ recíprocas positivas $A = (a_{ij}) = (P_C(A_i, A_j))$ para todo $C \in C$. Sea $[0,1]^n$ el producto cartesiano de $[0,1]$, y sea $\psi: R_{M(n)} \rightarrow [0,1]^n$ para $A \in R_{M(n)}$, $\psi(A)$ es un vector n -dimensional cuyas componentes caen en el intervalo $[0,1]$. La tripleta $(R_{M(n)}, [0,1]^n, \psi)$ es una escala derivada. Una escala derivada es una aplicación entre dos sistemas relacionales numéricos.

Definición 2.- La aplicación P_C se dice que es consistente si y sólo si:

$$P_C(A_i, A_j) P_C(A_j, A_k) = P_C(A_i, A_k) \text{ para todo } i, j \text{ y } k.$$

De forma similar se dice que la matriz A es consistente si $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ para todo i, j y k .

Si P_C es consistente, entonces el Axioma 1 se cumple automáticamente y la ordenación inducida por ψ coincide con las comparaciones pareadas.

Definición 3.- Un conjunto S con una relación binaria (\leq), se dice que es un orden parcial si satisface las siguientes propiedades:

- a) Reflexiva: Para todo $x \in S$, $x \leq x$.
- b) Transitiva: Para todo $x, y, z \in S$, si $x \leq y$, e $y \leq z$ entonces, $x \leq z$.
- c) Antisimétrica: Para todo $x, y \in S$, si $x \leq y$, e $y \leq x$, entonces $x = y$ (x e y coinciden).

Definición 4.- Para cualquier relación $x \leq y$ (léase “ y incluye a x ”) se define $x < y$ para representar $x \leq y$ con $x \neq y$. Se dice que y domina (cubre) a x , si $x < y$, y si $x < t < y$ no es posible para ningún t .

Los conjuntos parcialmente ordenados con un número finito de elementos pueden ser representados convenientemente por un grafo orientado. Cada elemento del grafo se representa en un nodo, de forma que haya un arco dirigido desde y a x , si $x < y$.

Definición 5.- Un subconjunto E de un conjunto parcialmente ordenado S se dice que está acotado superiormente (inferiormente) si existe un elemento $s \in S$ tal que $x \leq s$ ($\geq s$) para cada $x \in E$. El elemento s se denomina una cota superior (inferior) de E . Se dice que E tiene un supremo (ínfimo) si tiene cotas superiores (inferiores) y el conjunto de cotas superiores U (inferiores L) tiene un elemento u_1 (l_1) tal que $u_1 \leq u$ para todo $u \in U$ ($l_1 \geq l$ para todo $l \in L$).

Definición 6.- Sea H un conjunto parcialmente ordenado cuyo elemento mayor es b . H es una jerarquía si satisface las siguientes condiciones:

- (1) Existe una partición de H en conjuntos denominados niveles $\{L_k, k=1,2,\dots,h\}$, donde $L_1=\{b\}$.
- (2) $x \in L_k$ implica que $x^- \subseteq L_{k+1}$, donde $x^- = \{y \mid x \text{ cubre a } y\}$, $k=1,2,\dots,h-1$.
- (3) $x \in L_k$ implica que $x^+ \subseteq L_{k-1}$, donde $x^+ = \{y \mid y \text{ cubre a } x\}$, $k=2,3,\dots,h$.

Definición 7.- Dado un valor positivo real $\rho \geq 1$, un conjunto no vacío $x^- \subseteq L_{k+1}$ se dice ρ -homogéneo con respecto a $x \in L_k$ si para cada par de elementos $y_1, y_2 \in x^-$, $1/\rho \leq PC(y_1, y_2) \leq \rho$. En particular, el axioma de reciprocidad implica que $PC(y_i, y_i) = 1$.

Axioma 2.- (Homogeneidad) Dada una jerarquía H , $x \in H$ y $x \in L_k$, $x^- \subseteq L_{k+1}$ es ρ -homogéneo para $k=1,\dots,h-1$.

Dados $L_k, L_{k+1} \subseteq H$, denotaremos la escala local derivada para $y \in x^-$ y $x \in L_k$ por $\psi_{k+1}(y/x)$, $k=2,3,\dots,h-1$. Sin pérdida de la generalidad se puede suponer que $\sum_{y \in x^-} \psi_{k+1}(y/x) = 1$. Las columnas de la matriz $\psi_k(L_k/L_{k-1})$ son escalas locales derivadas de los elementos en L_k con respecto a los elementos en L_{k-1} .

Definición 8.- Un conjunto A se dice *dependiente externo*, o *exterior*, de un conjunto C si se puede definir una escala fundamental en A con respecto a todo elemento $C \in C$.

La dependencia exterior refleja la dependencia de los elementos de un nivel respecto del nodo del nivel superior del que cuelgan (dependencia de los elementos inferiores de la jerarquía respecto de los superiores)

Definición 9.- Sea A dependiente exterior de C . Los elementos de A se dice que son *dependientes internos*, o *interiores*, con respecto a $C \in C$, si para algún $A \in A$, A es dependiente exterior de A .

Axioma 3.- Sea H una jerarquía con niveles L_1, L_2, \dots, L_h . Para cada $L_k, k=1,2,\dots,h-1$,

- (1) L_{k+1} es dependiente exterior/externo de L_k .

- (2) L_{k+1} es no dependiente interior/interno con respecto a todos los $x \in L_k$.
 (3) L_k es no dependiente exterior/externo de L_{k+1} .

Principio de Composición Jerárquica.- Si se verifica el Axioma 3, la escala global derivada (ordenación) de cualquier elemento en H se obtiene de sus componentes en el correspondiente vector de los siguientes:

$$\begin{aligned} \psi_1(b) &= 1 \\ \psi_2(L_2) &= \psi_2(b/b) \\ &\dots \\ \psi_k(L_k) &= \psi_k(L_k/L_{k-1}) \psi_{k-1}(L_{k-1}), \quad k=3, \dots, h. \end{aligned}$$

Si se omite el Axioma 3, el Principio de Composición Jerárquica deja de verificarse debido a que la dependencia exterior e interior entre niveles o componentes que se necesitan no forman una jerarquía. El principio de composición apropiado se deriva del enfoque supermatrix del cuál el Principio de Composición Jerárquica en un caso especial (Saaty, 1980).

Una jerarquía es un caso especial de sistema o red, cuya definición viene dada por:

Definición 10.- Sea G una familia de conjuntos no vacíos G_1, G_2, \dots, G_n , donde G_i consta de los elementos $\{e_{ij}, j=1, \dots, m_i\}$, $i=1, 2, \dots, n$. G es un sistema si:

- (i) Es un grafo orientado cuyos vértices son G_i , y cuyos arcos se definen a través del concepto de dependencia exterior; esto es
 (ii) Dadas dos componentes G_i y $G_j \in G$ existe un arco desde G_i a G_j si G_j es dependiente exterior de G_i .

Sea $D_A \subseteq A$ el conjunto de los elementos de A dependientes externos de $A \in A$. Sea $\psi_{A,C}(A_j)$, $A_j \in A$, la escala derivada de los elementos de A con respecto a $A_i \in A$ para un criterio $C \in C$. Sea $\psi_C(A_j)$, $A_j \in A$, la escala derivada de los elementos de A con respecto a un criterio $C \in C$. Se define el peso dependiente (dependence weight)

$$\phi_C(A_j) = \sum_{A_i \in D_{A_j}} \psi_{A_i,C}(A_j) \psi_C(A_i).$$

Si los elementos de A son dependientes internos con respecto a $C \in C$, entonces $\phi_C(A_j) \neq \psi_C(A_j)$ para algún $A_j \in A$.

Las expectativas son creencias acerca de la ordenación de las alternativas derivada del conocimiento a priori. Se supone que un decisor tiene una ordenación, intuitiva, de un conjunto finito de alternativas A con respecto al conocimiento a priori de los criterios C. El decisor puede tener expectativas acerca de la ordenación.

Axioma 4.- (Expectativas)

$$C \subset H-L_h, A = L_h$$

Este axioma dice que cuando se toma una decisión, siempre se supone que la estructura jerárquica está completa. Esto es, que todas las alternativas y los criterios considerados relevantes para la resolución del problema están representadas en la jerarquía,. No se supone la racionalidad del proceso, ni tampoco que solamente se pueda acomodar a una interpretación racional. La gente tiene muchas expectativas que son irracionales.

A continuación se mencionan una serie de resultados que se desprenden de los axiomas anteriores, y cuya demostración puede verse, entre otros, en Saaty (1980) y Saaty (1994).

Sea $R_{C(n)}$ el conjunto de todas las matrices $(n \times n)$ consistentes ($R_{C(n)} \subset R_{M(n)}$).

Teorema 1.- Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \in R_{C(n)}$ si y sólo si $\text{rango}(A)=1$.

Teorema 2.- Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \in R_{C(n)}$ si y sólo si su valor propio principal λ_{\max} es igual a n.

Teorema 3.- Sea $A = (a_{ij}) \in R_{C(n)}$. Existe una función $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$, con $\psi: R_{C(n)} \rightarrow [0,1]^n$ tal que:

(1) $a_{ij} = \psi_i(A) / \psi_j(A)$.

(2) La dominación relativa de la i -ésima alternativa, $\psi_i(A)$, es la i -ésima componente del vector propio principal de A .

Dadas dos alternativas A_i, A_j en A , $A_i \succ_C A_j$ si y sólo si $\psi_i(A) \geq \psi_j(A)$.

Teorema 4.- Sea $A \in R_{C(n)}$, y sean $\lambda_1 = n$ y $\lambda_2 = 0$ los valores propios de A con multiplicidades 1 y $n-1$ respectivamente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si

$$|a_{ij} + \tau_{ij} - a_{ij}| = |\tau_{ij}| \leq \delta \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, n,$$

la matriz $B = (a_{ij} + \tau_{ij})$ tiene exactamente 1 y $(n-1)$ valores propios en los círculos $|\mu - n| < \varepsilon$ y $|\mu - 0| < \varepsilon$, respectivamente.

Teorema 5.- Sea $A \in R_{C(n)}$ y sea w su vector propio principal por la derecha. Sea $\Delta A = (\delta_{ij})$ una matriz de perturbaciones de los valores de A tal que $A' = A + \Delta A \in R_{M(n)}$, y sea w' su vector propio principal por la derecha. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|\delta_{ij}| \leq \delta$ para todo i y j , se cumple $|w'_i - w_i| \leq \varepsilon$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 6.- (Estimación de razones). Sea $A \in R_{M(n)}$, y sea w su vector propio principal por la derecha. Sean $\varepsilon_{ij} = a_{ij} w_j / w_i$ para todo i y j , y sea $1 - \tau < \varepsilon_{ij} < 1 + \tau$, $\tau > 0$, para todo i y j . Dados $\varepsilon > 0$ y $\tau < \varepsilon$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo (x_1, x_2, \dots, x_n) , $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, si se verifica

$$1 - \delta < \frac{a_{ij}}{x_i / x_j} < 1 + \delta, \quad \forall i, j$$

entonces

$$1 - \varepsilon < \frac{w_i / w_j}{x_i / x_j} < 1 + \varepsilon, \quad \forall i, j$$

Teorema 7.- Sea $A = (a_{ij}) \in R_{M(n)}$. Sea λ_{\max} su valor propio principal y sea w su correspondiente vector propio por la derecha con $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, entonces $\lambda_{\max} \geq n$.

Teorema 8.- Sea $A \in R_{M(n)}$. Sea λ_{\max} el valor propio principal de A , y sea w su correspondiente vector propio por la derecha con $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, la expresión

$$\mu \equiv (\lambda_{\max} - n) / (n - 1)$$

es una medida de la distancia media a la consistencia.

Definición 11.- La intensidad de los juicios asociados con un camino que va desde i a j , denominado intensidad del camino es igual al producto de las intensidades asociadas con los arcos de ese camino.

Definición 12.- Un ciclo es un camino de comparaciones pareadas que termina en su punto de partida.

Teorema 9.- Si $A \in R_{C(n)}$, las intensidades de todos los ciclos son iguales a a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 10.- Si $A \in R_{C(n)}$, las intensidades de todos los caminos que van desde i a j son iguales a a_{ij} .

Corolario 1.- Si $A \in R_{C(n)}$, el valor de la posición (i, j) puede representarse como la intensidad de los caminos de cualquier longitud que comienzan en i y terminan en j .

Corolario 2.- Si $A \in R_{C(n)}$, el valor de la posición (i, j) es la intensidad media de los caminos de longitud k que van de i a j , y $A_k = n^{k-1} A$ ($k \geq 1$).

Teorema 11.- Si $A \in R_{C(n)}$, el valor de la posición (i, j) viene dado por la media de todas las intensidades de los caminos que comienzan en i y terminan en j .

Teorema 12.- Si $A \in R_{C(n)}$, la escala de dominación relativa viene dada por cualquiera de sus columnas normalizadas, y coincide con el vector propio principal por la derecha de A .

Corolario 3.- El vector propio principal es único salvo por una constante multiplicativa.

Teorema 13.- Si $A \in R_{M(n)}$, la intensidad de todos los caminos de longitud k que van de i a j viene dada por:

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^n a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{k-1} j}.$$

Teorema 14.- Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \notin R_{C(n)}$. El vector propio principal por la derecha de A viene dado por el límite de la intensidad normalizada de los caminos de longitud k ,

$$w_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{ih}^{(k)}}{\sum_{i=1}^n a_{ih}^{(k)}}, \quad i=1,2,\dots,n, \quad \text{para todo } h=1,2,\dots,n.$$

Corolario 4.- Sea $A \in R_{M(n)}$, $A \notin R_{C(n)}$. El vector propio principal por la derecha de A es único salvo por una constante multiplicativa.

Teorema 15.- Sea A un conjunto finito de n elementos A_1, A_2, \dots, A_n , y sea $C \in C$ un criterio que todos los elementos de A tienen en común. Sea A la matriz de comparaciones pareadas resultante. La i -ésima componente del vector propio principal a derecha de la matriz de comparaciones pareadas recíproca A , proporciona la dominación relativa de A_i , $i=1, 2, \dots, n$.