

ANOMALÍAS Y SUPERVIVENCIA EN EL MÉTODO DE TOMA DE DECISIONES DE SAATY

José Luis Zanazzi

Departamento Producción, Gestión y Medio Ambiente, FCEFyN,
Universidad Nacional de Córdoba
E-mail: jlzanazzi@com.uncor.edu

***Resumen:** El presente trabajo se orienta al análisis y comprensión, con enfoque epistemológico, de la discusión planteada en torno al método conocido como Analytic Hierarchy Process (AHP). El caso es interesante porque en los últimos veinte años, un nutrido grupo de científicos ha orientado una parte importante de su trabajo, a la detección de anomalías en el método y al desarrollo de posibles mejoras. Al respecto, el trabajo analiza el carácter de las discrepancias planteadas. Además explica, desde el punto de vista de la Filosofía de la Ciencia, tanto los motivos por los cuales ese método ha generado un elevado nivel de discusión y actividad, como las razones que hacen posible que continúe vigente, superando las múltiples objeciones recibidas. Para el desarrollo, se adopta como fundamento epistemológico el enfoque de Lakatos. Es decir, se considera el método AHP como un Programa de Investigación y se identifican en el mismo los elementos típicos de dichos programas, tales como núcleo central, cinturón protector y heurísticas. Con el mismo criterio, se define otro Programa al cual se denomina Decisión Multicriterio Discreta (DMD), que reúne las ideas predominantes en la actualidad sobre modelos para toma de decisiones. Por otra parte, se recorren las publicaciones que presentan posturas favorables y desfavorables, y se determina en cada situación si la discusión se refiere a condiciones fundamentales (núcleo) o accesorias. Asimismo, la comparación de ambos Programas permite inferir las causas de la preocupación por el tema. En las conclusiones se destaca que las condiciones fundamentales adoptadas por el AHP, son diferentes a las usuales de la DMD, lo cual explica la controversia. Además se reconoce que el AHP, como Programa de Investigación, ha evolucionado hasta el momento conforme a la expectativa de Lakatos.*

Palabras clave: Programas de investigación (Lakatos), Toma de decisiones, Analytic Hierarchy Process (AHP), Discrepancias

1 INTRODUCCION

El presente trabajo se orienta al análisis y comprensión, con enfoque epistemológico, de un caso particular en las ciencias relacionadas con la toma de decisiones. Se trata de la discusión planteada sobre el método conocido como Analytic Hierarchy Process (AHP), propuesto de manera integrada en Saaty (1980).

El caso en cuestión es interesante porque en torno a dicho método, se originaron abundantes controversias que con diferentes matices persisten en la actualidad. En efecto, en los últimos veinte años un nutrido grupo de científicos ha concedido tiempo y esfuerzo a la detección de anomalías en dicha propuesta y al desarrollo de posibles mejoras. Cabe entonces preguntarse sobre cuáles son las anomalías detectadas por la comunidad científica y en particular, cómo se explica desde el punto de vista de la Filosofía de la Ciencia, que un solo método genere ese nivel de discusión y actividad (más de cincuenta papers), y cuáles son las razones que hacen posible que el método continúe vigente, superando las múltiples objeciones recibidas.

Para el desarrollo, se adopta como fundamento epistemológico el enfoque de Lakatos, conforme a lo presentado en Chalmers (2002). Es decir, se considera el método de Saaty como un Programa de Investigación y se identifican en el mismo los elementos típicos de dichos programas, tales como núcleo central, cinturón protector y heurísticas, tanto positivas como negativas.

Además se asume que el Programa de Investigación del AHP, convive con otros Programas de Investigación contemporáneos y se concede importancia a las posibles relaciones con los mismos. En particular se acepta que el AHP es un desprendimiento de otro Programa, al cual se referencia como Decisión Multicriterio Discreta (DMD). Esto es así, porque buena parte de las controversias parecen originarse en los investigadores de la DMD. Las diferencias entre ambos programas de investigación puede ayudar a comprender las razones que motivan las mismas.

A fin de explorar sobre esas posibles diferencias, el trabajo considera las publicaciones acumuladas en torno al AHP. En cada caso se busca identificar el, o los planteos centrales de los artículos y las reacciones que generaron en la comunidad científica.

Conforme al carácter de estas discusiones, se intenta determinar si el aspecto tratado es considerado o no, como una cuestión fundamental. Esto se hace en la convicción de que las cuestiones consideradas fundamentales son precisamente aquellas que definen el núcleo central de cada Programa de Investigación.

A partir de estos resultados, se definen tanto los núcleos de ambos Programas, como los cinturones de protección y las heurísticas. Por último, el contraste de ambos núcleos permite identificar el origen de las discrepancias.

2 PROGRAMAS DE INVESTIGACIÓN RELACIONADOS CON EL AHP

A los fines de este trabajo se asume la existencia de dos Programas de Investigación, uno al cual se denomina Decisión Multicriterio Discreta (Programa DMD) y otro, relacionado estrictamente con el método objeto de estudio, denominado Analytic Hierarchy Process (Programa AHP). Como se anticipó, se asume que el segundo es un desprendimiento del primero y que como tal, ha incorporado algunas de sus propiedades.

2.1 Programa de Investigación DMD

Este Programa de Investigación se aboca al diseño de métodos que faciliten el desarrollo de procesos de decisión. Así entonces, es de interés para la DMD todo problema donde sea preciso seleccionar una alternativa como la más conveniente, ordenar un conjunto de alternativas en función de su nivel de preferencias o clasificarlas conforme a una cierta cantidad de criterios.

Los orígenes de la especialidad se remontan a la Revolución Francesa, cuando algunos matemáticos se abocaron al problema de realizar elecciones justas en el turbulento ambiente de la Asamblea revolucionaria. Ya en el siglo XX, Koopmans (1951) introduce el concepto de óptimos paretianos. El mismo destaca que cuando un conjunto de alternativas es analizada con criterios que se contraponen, no es razonable la obtención de un óptimo global, es decir que una alternativa sea preferible a todas las demás, en todos los criterios. Dos textos se convirtieron en clásicos de esta vertiente. En primer lugar se debe mencionar a Fishburn (1970), quien presenta la fundamentación teórica necesaria para representar la estructura de preferencias de un decisor por medio de números reales, herramienta conocida como función de utilidad. La segunda referencia obligada es Keeney y Raiffa (1976), donde se aborda el problema de buscar una solución aceptable en un esquema de óptimos paretianos y se discuten y analizan diferentes modos de valorar los criterios de decisión.

En esa concepción, se denomina ordinales a los métodos que expresan las preferencias a partir exclusivamente de un ordenamiento de las alternativas y se denomina cardinales, a las herramientas que intentan representar las intensidades de preferencia; es decir, no sólo que una alternativa es preferible a otra, sino también, cuánto más preferible resulta.

2.2 El programa de investigación AHP

Puede plantearse que este Programa se inaugura formalmente con algunos papers como Saaty(1977) y Saaty (1978), y en particular un libro: Saaty (1980), donde el autor explica aspectos relevantes en las etapas de desarrollo del método, como por ejemplo las experimentaciones previas.

Se considera que este Programa se origina en el DMD presentado anteriormente, por varios motivos entre los que se destacan:

Existe coincidencia en las características de los problemas que se pretende resolver. Las estrategias de resolución son similares, se definen criterios y se valoran las preferencias utilizando funciones de utilidad.

3 RECOPIACIÓN Y ANÁLISIS DE PUBLICACIONES REFERIDAS AL AHP

A los fines del presente trabajo, se han clasificado los ámbitos de discusión según la etapa del método que se encuentra bajo análisis. Así entonces, los tópicos analizados son los siguientes:

- Estructura jerárquica del proceso de decisión
- Valoración de las preferencias
- Normalización
- Agregación
- Reversión de rangos

Cabe destacar que los cuatro primeros títulos, fueron originalmente utilizados por Zahedi(1986). A dicha clasificación se le adiciona la reversión de rangos, por tratarse de un problema que comienza a preocupar a los científicos con posterioridad a dicha revisión

Debido a que esta forma de abordar las discusiones no facilita el seguimiento temporal de las opiniones y papers, y considerando que este seguimiento es un componente importante en el enfoque de Lakatos, el apartado 3 cierra con una breve cronología.

3.1 Estructura jerárquica del proceso de decisión

La estructura jerárquica del AHP es una de las particularidades del método, al punto que está reflejada en su nombre. De hecho, no hay otras propuestas que permitan una discriminación tan acabada del proceso de decisión, mediante la representación de tantos criterios y subcriterios como sea necesario.

Una objeción recibida en este aspecto es de Johnson (1979), donde se advierte que si la jerarquía es incompleta, pueden distorsionarse los pesos. Si bien no hubo una respuesta directa al planteo, el comentario fue recogido e incluso reproducido posteriormente en los libros de Saaty. Al respecto, este recomienda que la o las personas que deben tomar la decisión, diseñen cuidadosamente la estructura jerárquica, conscientes de esta posible dificultad.

Por otra parte, Epstein y King (1982) señalan que al incorporar la posibilidad de estructurar el proceso de decisión a través de una jerarquía, las diferencias de información en cada uno de los elementos de dicha jerarquía, deben introducir distorsiones en las valoraciones de sus elementos. En este caso hubo respuestas explícitas, por ejemplo Saaty (1983), señala que el problema es de disponibilidad de información, no del método; más aún, sostiene que se trata de un problema general de la DMD. Posteriormente, la extensa revisión de Zahedi (1986)

alude al tema, explicando que en todo el ámbito de las ciencias de la administración, se tropieza con este inconveniente.

Ahora bien, desde el punto de vista de la filosofía de la ciencia, estas cuestiones parecen tener naturaleza diferente. El aporte de Johnson (1979) se resume en comentarios y recomendaciones sobre el método, no hace referencia a posibles transgresiones de condiciones fundamentales (núcleo central). Por lo tanto puede considerarse como parte del trabajo típico de los científicos, para reforzar el escudo protector. En cambio el comentario de Epstein y King (1982), refiere no sólo a un aspecto propio del AHP, sino que, como bien lo señaló el mismo Saaty, roza tangencialmente uno de los supuestos claves de la DMD. Es razonable pensar que este es uno de los motivos por el que los trabajadores científicos del programa de investigación DMD, no se hicieron eco de este aporte.

3.2 Valoración de las preferencias

El modelo requiere hacer comparaciones por parejas entre todas las alternativas, valorando el nivel de preferencia con una escala definida en el intervalo que va desde 1 (equivalencia), hasta 9 (preferencia extrema). El primer comentario al respecto es de Watson y Freeling (1982), se trata de una breve reflexión en la cual sostiene que la mente humana no opera al modo AHP, sino que realiza siempre comparaciones y ordenamientos globales.

Esta opinión, proveniente del campo de la psicología, atenta contra la estrategia general del AHP. De hecho, si esto es cierto, deben descartarse además del de Saaty, diversos métodos de la DMD que utilizan este tipo de comparaciones (Electre, Promethee, por ejemplo), en beneficio de otros que, como el UTA, parten de las preferencias globales.

Esta página generó un amplio esfuerzo de respuesta que inicia en Saaty, Vargas y Wendell (1983), recordando experimentos iniciales de Saaty, anteriores a la presentación formal de su método. Estas mismas experiencias son citadas posteriormente en artículos como Saaty (1994), o en libros de texto como Saaty (1995).

Uno de estos experimentos consiste en proponer la comparación de cinco figuras geométricas (círculo, cuadrado, rectángulo, triángulo y rombo), con diferentes áreas; luego, utilizando la escala (1, 9) deben compararse de a dos por vez, respondiendo la pregunta de cuánto mayor es el área de una figura respecto de la otra. En los trabajos citados, se asegura que esta mecánica arrojó muy buenas estimaciones de las relaciones verdaderas, en personas con diferentes niveles de edad o de educación.

Claro está que leer sobre este tipo de verificaciones experimentales, invita a preguntar sobre las condiciones en que se desarrollaron las mismas, en particular aquellos que utilizan figuras geométricas. Por ejemplo sería interesante conocer qué factores experimentales se identificaron y de qué modo se los controló, cómo fueron seleccionadas las unidades

experimentales (personas participantes), o cuál fue el tratamiento posterior de los residuos o errores cometidos.

Esa información es indispensable para posibilitar la repetición de la experiencia y de hecho, permitir la extrapolación de sus resultados. Sin embargo, este autor no la ha encontrado hasta el momento, aunque presume su existencia debido a que tampoco se registran controversias al respecto.

En respuesta al argumento de la experimentación, Watson y Freeling (1983) aseguran que diversos experimentos realizados en sicometría, no coinciden en cuanto a la ventaja de hacer comparaciones por parejas en vez de un análisis global. Curiosamente algunos científicos (no psicólogos sino especialistas en DMD), que en ese momento se encuentran trabajando sobre métodos de valoración global como los de utilidad multiatributo, no suman sus opiniones al respecto.

Antes bien, parece que se aceptan los argumentos del AHP. En particular Zahedi (1986) se refiere a la discrepancia usando una curiosa expresión, que se reproduce en inglés para destacar su estilo: *“Since the method of data collection separates AHP from methods of multiattribute utility estimation, more crossfire is expected in this area in the future”*.

También en el aspecto de la valoración de preferencias, se realizan otros aportes. Por ejemplo en Saaty (1977) y (1978), se utilizan conjuntos difusos para representar los errores inevitables en las observaciones. El mismo argumento se rescata y profundiza posteriormente en la fundamentación axiomática del AHP, presentada en Saaty (1986).

Complementariamente otros científicos proponen modos de controlar los errores de medición, al aceptar que estos no pueden ser definitivamente eliminados con el recurso de chequear la consistencia y mejorar los juicios, si esta no es aceptable. En esta línea puede citarse a Mc Meekin (1979); Vargas (1982); Jong (1984), Demis (1985) y Zahedi (1985).

Respecto a la escala utilizada, en Jensen (1984) se sugiere que la escala no debería estar acotada al intervalo que va desde (1/9) hasta 9. De hecho el método permite utilizar implícitamente, valoraciones indirectas que exceden dicha escala.

Otro aspecto señalable en el AHP, es que su aplicación resulta excesivamente laboriosa, por la necesidad de comparar todas las parejas posibles de elementos. Al respecto, tanto en Takeda (1987), como en Harker (1987), se realizan propuestas tendientes a reducir la cantidad de comparaciones.

Por último corresponde recordar la contribución de Lootsma (1992). Este trabajo propone cambiar la escala de medición, por la secuencia (-8), (-4), (-2), 0, 2, 4, 8, es decir, duplicando las valoraciones; las razones argumentadas son de origen sicométrico.

Claro está que dicha modificación impide construir la matriz recíproca de Saaty, con lo cual ya no es posible utilizar el vector propio como estrategia de normalización. Por ese motivo, el referido trabajo propone normalizar utilizando una regresión logarítmica. Es decir que el cambio de escala genera una variación profunda en el método.

En resumen, en el tópico de la medición de las preferencias se han realizado diversas observaciones entre las que se destacan:

La estrategia no es la mejor, es preferible un ordenamiento global.

Las escalas no son adecuadas, además no deben estar acotadas.

Las comparaciones por parejas inducen a errores e inconsistencias.

Los errores no pueden eliminarse completamente con el estudio de la inconsistencia.

Las comparaciones por parejas tornan muy laborioso el método.

La única cuestión central que aparece aquí es la primera, ordenamiento global o comparaciones por parejas. Las restantes no ponen en discusión el método en sí, en todo caso procuran hacerle aportes, mejorarlo. Pueden ser consideradas como actividades tendientes a reforzar el cinturón protector particular del AHP.

Lo llamativo es que en torno a la cuestión fundamental no se generó una encendida polémica, no suscitó la participación masiva de los expertos en DMD. Pero esto puede explicarse recordando que en el núcleo central de la DMD, no hay una definición acerca de cuál de las estrategias es válida, ordenamiento global o comparaciones específicas.

3.3 Normalización

El AHP normaliza las matrices de preferencias, transformando las valoraciones planteadas en Utilidades definidas en la escala (0,1), mediante la obtención del vector propio de las mismas. Esto es así porque las matrices de preferencias son recíprocas y definidas como positivas, luego un solo autovalor es posible.

Si los juicios volcados en la matriz son perfectamente consistentes, el autovector reproduce los juicios con exactitud. Pero ante la presencia de inconsistencias, las utilidades normalizadas se deforman y resultan de difícil interpretación.

Este problema contradice una de las condiciones fundamentales adoptadas en los programas de investigación DMD, aquella que exige que la normalización no distorsione los juicios emitidos por el decisor. Pero la explicación aceptada como válida es que las personas son naturalmente inconsistentes y que todos sus juicios, tanto el directo como los indirectos deben ser considerados.

Más aún, la posibilidad de reflejar esas inconsistencias naturales ha sido reiteradamente presentada como una de las virtudes del AHP. A fin de aprovechar esa ventaja, la comunidad

científica acepta una relajación en la siempre rígida exigencia de que los juicios no deben ser distorsionados.

Incluso es el padre del AHP, quien en Saaty(1980) propone la primera corrección, esto es calcular con auxilio computacional todas las valoraciones de preferencias y utilizar el promedio de las mismas como medida confiable. Dicha propuesta es, no sólo aceptada sino mejorada por De Graan (1980) y por Fichtner (1983), quienes proponen el empleo de la media geométrica como medida representativa.

Por su parte, en Cogger y Yu (1983), se sugiere que el estimador apropiado debe obtenerse aplicando el método de los mínimos cuadrados. En la misma línea, un trabajo ya citado, Jensen (1984), propone complementar su propuesta de no acotar la escala de valoración de preferencias con la minimización de los cuadrados mínimos.

Por su parte, Kamenetzky (1982) y Belton y Wendell (1985), proponen utilizar iterativamente el vector propio. Esto es, aplicar sucesivas normalizaciones hasta obtener la estabilidad de los ponderadores.

Incluso se repiten en los artículos algunas afirmaciones curiosas, que no son inmediatamente rechazadas. Un ejemplo notable se da en la ya mencionada revisión de Zahedi (1986), que nuevamente se reproduce en inglés a fin de no traicionar el estilo. El comentario dice: “No consensus exists on the choice of stimators, although the eigenvalue method has the great advantage of a relatively long history of use an of a support of a soft”.

De todos modos esta discusión se prolongó en el tiempo y durante la década de los noventa se relacionó con el problema de reversión de rangos, por lo que sus fundamentos se tratan en el apartado 3.5. El último aporte en este sentido, es el de Bana e Costa y Vansnick (2001), donde se considera razonable que las intensidades de las preferencias no se conserven invariantes, debido a la inconsistencia, pero se aduce que, si realmente el método de Saaty opera con utilidades cardinales, al menos debería reflejar las diferencias entre esas intensidades

Luego, dicho trabajo demuestra con diferentes ejemplos, recopilados de publicaciones del mismo Saaty, que la transformación basada en el Vector Propio, no consigue tampoco cumplir con esa condición. Además, en ese extenso artículo, se realizan múltiples reflexiones sobre lo que debe entenderse como las condiciones fundamentales de la DMD (núcleo central). Por ese motivo, en el Anexo B del presente trabajo, se adjunta la traducción de algunos párrafos seleccionados del original en francés.

Antes de cerrar el presente apartado, es preciso reflexionar sobre cuáles son los aspectos fundamentales que se identificaron. En primer lugar, parece que la premisa de no deformar los juicios, propia de la DMD, debe ser cambiada en el AHP por la de aplicar estimaciones que presenten la menor variabilidad posible.

En segundo término, cabe preguntar si el empleo del Vector Propio es para el AHP una condición fundamental. La duda se origina en el hecho de que prácticamente todas las referencias al método, presentes en la literatura especializada, aluden a su propuesta inicial de utilizar el vector propio.

Sin embargo, varios de los principales científicos alineados en el Programa AHP, han trabajado sobre otras propuestas de normalización (por ejemplo Vargas, Zahedi o el propio Saaty). Por ese motivo, en la continuidad del presente trabajo se considera a la normalización con el vector propio, como una condición no fundamental.

3.4 Agregación

La última fase metodológica está destinada a agregar las valoraciones obtenidas a lo largo de todo el proceso de análisis. En este aspecto, Saaty utiliza un recurso compartido con la mayor parte de los modelos de apoyo Multicriterio, la aplicación de una función de utilidad lineal aditiva.

De todos modos, también este aspecto del método ha recibido diferentes aportes. Por ejemplo, en Bartoszyński y Puri (1981), se propone salvar el problema de la variabilidad de los juicios, planteando estimaciones por intervalo de las verdaderas ponderaciones. Además se realiza una deducción de las propiedades estadísticas de los estimadores puntuales, condición imprescindible para obtener intervalos.

Por su parte, en Vargas (1982), se analiza el efecto de la variabilidad sobre las matrices recíprocas que son típicas en el AHP. Con el mismo enfoque, en Dennis (1985) se deducen las distribuciones de probabilidad de los ponderadores y se proponen formas de agregación compatibles con dichas distribuciones.

No parece que en este caso aparezca una cuestión fundamental, antes bien, parecen evidencias de la actividad científica orientada a reforzar el cinturón protector del AHP. Nuevamente se reacciona ante las debilidades buscando formas de salvarlas.

3.5 Reversión de Rangos

Una de las primeras referencias a la reversión de rangos se encuentra en Belton y Gear (1983), al advertir que el AHP parece tener dificultades para cumplir con el axioma de las alternativas irrelevantes. Esto es, el ordenamiento relativo de un par de alternativas cambia de acuerdo a la valoración de una tercera totalmente independiente.

Ahora bien, esta cuestión puede enmarcarse como referida al núcleo central del programa DMD, donde se asume que las escalas cardinales deben poder superar los problemas de las ordinales, entre los que se destaca el axioma de las alternativas irrelevantes originado en Borda.

Desde sus primeras menciones, este asunto fue adquiriendo cada vez mayores dimensiones. En principio se suceden papers orientados a proteger el método, como el de Dyer y Wendell (1985), tendiente a preservar los rangos, o como el de Jensen (1984), quien sugiere realizar la agregación comparando los resultados con un ordenamiento global previamente obtenido.

Posteriormente la actividad se transforma en debates y de algún modo, enfrentamientos. En Shoner y Wedley (1989) se señala por ejemplo que los pesos son ambiguos. Otros artículos como Dyer (1990), Holder (1990); Holder y Saaty (1990); Tversky, Slovic y Kahneman (1990) o Tversky y Simonson (1993); participan en esta abierta discusión. En Saaty y Vargas (1993) se relativiza el problema aduciendo que puede llegar a presentarse en sólo un ocho por ciento de las aplicaciones (porcentaje obtenido por simulación).

Algunas expresiones de Saaty (1994), reflejan el modo en que el autor del AHP intenta discutir la idea de que esta sea una condición fundamental. Por ejemplo plantea: “Early developers of utility theory axiomatically ruled that introducing alternatives particularly irrelevant ones, should not cause rank reversal (Luce and Raiffa 1957). A theory that rates alternatives one at a time, ... , assumes the existence of past standards established by experts for every decision problem But if past standards are inapplicable to new problems and if experts are not sufficiently familiar with the domain of a decision to establish standards and the environment changes rapidly, an insistence on making decisions based on standards will only force the organization to shift its efforts from solving the problem to updating standards”.

También en ese artículo, Saaty apela al principio de autoridad al asegurar que el AHP se desarrolla después de una década de intentos infructuosos, de representar correctamente los procesos de decisión utilizando teorías normativas. Y al respecto anuncia que dichos intentos se hicieron “with the assistance of some of the world’s best minds, to deal with negotiation and trade-off in the strategic political and diplomatic arena at the Arms Control and Disarmament Agency in the Department of State”.

Parece que todo este despliegue no consigue eludir la cuestión fundamental, para qué hacer tantas comparaciones, escalas y operaciones matriciales, si no se consigue salvar el problema clave del sencillo método de Borda. Todo indica que la comunidad científica de la DMD, no es convencida por este tipo de argumentos, dado que de allí en mas se encuentran múltiples referencias a que el método puede ser considerado como ordinal, por ejemplo en Perez (1995); Barba Romero y Pomerol (1997); Bana e Costa y Vansnick (2001).

3.6 Cronología

Conforme a los párrafos anteriores, en la vida del AHP es posible distinguir tres etapas. La primera corresponde al desarrollo y lanzamiento durante la década del setenta; la segunda a la que se puede considerar de apogeo, inicia en 1980 con la presentación del libro Saaty (1980) y se extiende hasta el 1988, con una gran cantidad de científicos trabajando de uno u otro modo para fortalecer el método; finalmente la última, de conflicto, se inicia aproximadamente en el 1989.

Respecto a los momentos iniciales, todo parece indicar que Saaty tuvo un fuerte respaldo económico durante la etapa de formulación. Luego, antes de la publicación formal de sus trabajos, realizó una recorrida por las principales universidades de EEUU a fin de concretar una presentación previa del método. Luego de esta gira se concretan varias publicaciones en revistas especializadas, hasta que en 1980, la editorial McGraw Hill publica su *“The Analytic Hierarchy Process”*.

En la segunda etapa, el apogeo, se encuentra el hecho destacable de que una gran cantidad de científicos trabajan en torno al método, detectando imperfecciones con el deseo de corregirlas. Se realizan en esa época muy pocas observaciones que pongan en duda la validez del mismo y de hecho, no parecen ser atendidas por el grueso de la comunidad orientada a decisión multicriterio.

Por el contrario, en esos primeros años de la década del 80 se concretan fuertes avances tendientes a generalizar su aplicación, más allá del ámbito científico. Puede recordarse por ejemplo, el lanzamiento del soft Expert Choice, amparado en una extensa cadena comercial propia que incluye a países de América Latina; o la publicación de diversas revisiones del AHP, donde se reconocen (según Saaty), al menos mil aplicaciones del método a macro problemas de decisión en ingeniería y economía.

Finalmente surgen a partir de 1989 diversas situaciones de conflicto, asociadas con los problemas de reversión de rangos y deformación de los juicios, cuando se utiliza el autovector. En esta etapa, las cuestiones que se discuten se relacionan con aspectos fundamentales del Programa DMD.

De hecho, después de 1995 ya no se encuentran papers orientados a proteger al AHP, sólo permanecen las múltiples aplicaciones en revistas no especializadas en multicriterio. Más aún, aparecen los miembros de la comunidad científica DMD sugieren repetidamente que el método no puede ser considerado como cardinal, lo que equivale a despreciarlo.

4 COMPARACIÓN DE LOS PROGRAMAS AHP Y DMD

Este apartado se propone realizar una comparación entre los elementos característicos del Programa AHP y el Programa original de la DMD. En particular se consideran relevantes las consideraciones referidas a los núcleos centrales.

Programa DMD	Programa AHP	Resultado de la comparación
Lo fundamental es obtener un ordenamiento confiable	Lo fundamental es el ejercicio de análisis del problema de decisión	Incongruencia
El decisor es racional, puede identificar las alternativas y expresar sus preferencias.	Idem	Coincidencia
El decisor puede especificar los criterios a considerar	El decisor puede estructurar el problema de decisión mediante una jerarquía de criterios.	El AHP amplía los requisitos de la DMD
El decisor puede especificar tanto ordenamientos globales como específicos.	Es conveniente que el ordenamiento sea específico, comparando por parejas.	El AHP utiliza una alternativa prevista en DMD
Las preferencias pueden expresarse con números reales (Funciones de Utilidad).	Se utilizan varias funciones de utilidad, se recomienda la escala (1,9).	El AHP utiliza una alternativa prevista en DMD
Pueden aplicarse métodos ordinales o cardinales.	Se desea expresar la intensidad de las preferencias, por lo que el método debe ser cardinal	El AHP utiliza una alternativa prevista en DMD
La estandarización no debe deformar los juicios	Por inconsistencias, hay diversos juicios (directos e indirectos). Se deben estandarizar minimizando los errores.	Incongruencia
En métodos cardinales, el ordenamiento relativo de dos alternativas, no debe depender de otras alternativas irrelevantes	No se establecen requisitos Saaty relativiza esta cuestión	Incongruencia

Como se advierte, hay tres incongruencias en cuestiones fundamentales. En primer lugar el objetivo de la herramienta técnica; luego la cuestión de distorsión de los juicios y finalmente la reversión de rangos. Parecen suficientes para generar posturas irreconciliables.

Cinturón Protector

El conjunto de métodos propuestos en la literatura, hace las veces de cinturón protector del Programa DMD. Cada uno de ellos, es un nuevo intento por cumplir mejor con el objetivo general de representar las percepciones humanas, y como intento debe ser analizado, discutido y mejorado.

De hecho, en tanto que los investigadores se abocan al análisis y discusión de una determinada metodología, las cuestiones centrales como la razonabilidad de intentar expresar dichas percepciones, quedan incólumes y protegidas.

En el AHP, en tanto, los elementos que deben ser analizados y mejorados son los siguientes:

- Representar la estructura jerárquica del proceso de decisión: los científicos enrolados en el Programa han trabajado sobre diferentes modos, con la intención de facilitar la construcción; equilibrar la información contenida en el árbol jerárquico y establecer ponderaciones adecuadas para los criterios.
- Valorar las preferencias: sin discutir la escala (1,9), se han propuesto diferentes modos de medirla; se han utilizado representaciones determinísticas o difusas y se plantean alternativas tendientes a reducir la cantidad de comparaciones necesarias.
- Normalizar las matrices: originalmente el método plantea la utilización del Vector Propio, pero existen muchas otras opciones: promedios, mínimos cuadrados directos, mínimos cuadrados de logaritmos, etc.
- Agregación en un ordenamiento global: puede ser ponderación lineal (propuesta original de Saaty) o ponderaciones no lineales compatibles con el estilo de normalización.

Heurísticas Positivas

En lo que respecta a las heurísticas, hay algunas positivas que se relacionan con la secuencia de operaciones necesarias para el desarrollo del proceso de decisión. Concretamente, según Roy (1985), los pasos a desarrollar en DMD son:

- *Discriminar las alternativas de decisión.*
- *Especificar el tipo de problema a resolver:* puede tratarse de una decisión, ordenamiento o asignación.
- *Definir los criterios de análisis:* esto es, especificar, definir lo mejor que se pueda, aquellos objetivos que se espera cumplir, comprender qué es lo que se espera lograr.
- *Valorar las alternativas de acuerdo a cada criterio:* se concreta mediante la asignación de utilidades a cada uno de los elementos, las cuales representan la satisfacción que genera cada alternativa respecto a los diferentes criterios.
- *Normalizar las utilidades:* consiste en transformar las valoraciones anteriores, de modo que todas se expresen en la misma escala.

- *Agregar los juicios establecidos sobre los diferentes criterios:* con lo cual se busca obtener una apreciación única de cada alternativa, un ordenamiento global.

Con este razonamiento, se considera heurística positiva a toda aquella actividad científica orientada a fortalecer o mejorar las diferentes etapas de la metodología general. Así entonces, los investigadores deben por ejemplo, abocarse a encontrar mejores formas de medir las preferencias, o a proponer modalidades de normalización que aseguren la invariancia de los juicios o a plantear formas de agregación que eviten las trampas propias de los métodos ordinales.

El Programa AHP coincide con dichas especificaciones dado que respecta las secuencias propuestas por Roy (1985). Luego, es recomendable: realizar contribuciones a cada una de las etapas del método; desarrollar aplicaciones del mismo y publicar sus resultados; desarrollar herramientas informáticas que faciliten su empleo.

Heurísticas negativas

Conforme al planteo general de Lakatos, una heurística negativa evidente es la de realizar propuestas que atenten contra los elementos del núcleo central. En este aspecto, nuevamente hay coincidencia entre los Programas comparados.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se analiza la evolución de un conocido método de soporte a la toma de decisiones, el denominado AHP de Saaty. Para hacerlo, se adopta como propio el enfoque de Lakatos y sus explicaciones sobre los mecanismos que actúan en el desarrollo de la ciencia.

En particular se definen dos Programas de Investigación, el propio AHP y otro denominado Decisión Multicriterio Discreta DMD. Con esta idea, se revisan las publicaciones orientadas a tratar el método, a fin de identificar diferentes motivos de controversia.

Con los resultados obtenidos, se comparan ambos Programas y se encuentran algunas diferencias importantes a nivel Núcleo Central. Las no coincidencias incluyen a lo que se entiende como beneficios en la aplicación de estas metodologías, las deformaciones en los juicios durante la normalización y la relevancia concedida al problema de reversión de rangos.

Es interesante señalar que se verifican en este caso las especificaciones de Lakatos referidas al adecuado desarrollo de programas de investigación. En efecto, recordando la cronología, las cuestiones centrales son determinadas en los primeros años del AHP, durante los cuales los científicos se abocan a la ampliación y defensa del método, sin discutir sus consideraciones fundamentales.

Es decir que se verifica la expectativa de Lakatos en cuanto a los inicios sin falsación del núcleo, sin prestar atención a las controversias. Más adelante, se encuentran dificultades a la hora de encontrar confirmaciones, la teoría del AHP pierde coherencia a los ojos de los partidarios más ortodoxos del Programa DMD. Sin embargo, más allá de ambos programas, al AHP parece conservar su condición de ser el más conocido y utilizado de los métodos multicriterio.

6 BIBLIOGRAFÍA

- Bana e Costa y Vansnick [2001] “Une critique de base de l’approche de Saaty mise en question de la methode de la valeur propre maximales”. Cahier du Lamsade. 175.
- Barlitzai J. y Golany B. (1994) “AHP rank reversal, normalization and aggregation rules”. INFOR, 32.
- Bartoszynski y Puri [1981] “A note on predicting the results of chess championship matches“. Behavioral science, Vol 26,1.
- Belton y Gear [1983] “On a short-coming of Saaty’s method of analytic hierachies“. Omega., Vol 11,3.
- Belton V. y Gear A. (1985) “The legitimacy of rank reversal – a comment”. Omega, 13,3.
- Cogger y Yu [1983] “Eigen weight vectors and lest distance aproximation for revealed preference in pairwise weight ratios”. University of Kansas. School of Business. Working paper, Lawrence, Kansas.
- Dennis [1985] “A probabilistic model of analyzing hierarchically structure multi-criterion decision problems”. Paper presentado en Joint National Meeting ORSA / TIMS, Boston.
- Dyer [1990a] “Remarks on the analytic hierarchy process“. Management sciences. Vol 36,3.
- Dyer(1990b) “A clarification of ‘Remarks on the Analytic Hierarchy Process’”. Management Science, 36,3.
- Dyer y Wendell [1985] “A critique of the analytic hierarchy process“. Working papers 84/85-4-24. Department of Management, University of Texas at Austin.
- De Graan [1980] “Extensions of the multiple criteria analysis method of Saaty”. Thecnical reports m.f.a 80-3, National Institute for Water Supply, Leidshendam. England July 22-25.
- Epstein y King [1982] “An experimental study of the value of information”. Omega, 10,3.
- Fichtner [1983] “Some thoughts about the mathematics of the analytic hierarchy process”. Working papers, Hochschule der Bundeswehr Munchen, September.
- Harker [1987] “Incomplete pairwise comparison in the analytic hierarchy process“. Mathematical modelling. Vol 9,11.
- Holder [1990] “Some comments on the analytic hierarchy process“. Journal of the Operational Research Society. Vol 41,11.
- Kamenetzky[1982] “The relationship between the analytic hierarchy process and the additive value function“. Decision Sciences. Vol 13,4.
- Jensen [1984] “An alternative scaling method of priorities in hierarchical structures”. Journal of mathematical Psychology, Vol 28,3.

- Jong [1984] "A statistical approach to Saaty's scaling method for priorities". *Journal of mathematical Psychology*, Vol 28,4.
- Johnson [1979] "A note on wright-left asymmetry in an eigen vector ranking procedure". *Journal of Mathematical Psychology*. Vol 19,1.
- Lootsma [1992] "Saaty's priority theory and the denomination of a senior professor in operations research". *European Journal of Operational Research*. Vol 4,6.
- Mc Meekin [1979] "The pairwise comparison approach to the estimation of a ratio scale: a stochastic interpretations of the best priorities weight ratio scale estimator". *Articulo presentado en Atlantic Economic Society Meeting Washington*.
- Pérez J.[1994] "Theoretical elements of comparison among ordinal discrete multicriteria methods". *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, Vol 3, 3.
- Pérez J.[1995] "Some comments on Saaty's AHP". *Managements Science*. Vol 41,6.
- Roy B [1985] "Méthodologie Multicritère d'Aide à la Decision". *Economica*, Paris.
- Saaty [1977] "A scaling method for priorities in hierarchical structures". *Journal of Mathematical Psychology*. Vol 15,3
- Saaty [1978] "Exploring the interface between hierarchies multiple objectives and fuzzy sets". *Fuzzy sets and Systems*. Vol 1,1.
- Saaty T. [1980] "The Analytic Hierarchy Process". McGraw Hill.
- Saaty T. [1987] "Rank generation, preservation and reserval in the analytic hierarchy process". *Decision Science*, Vol 18.
- Saaty T. [1990] "An exposition of the AHP in reply to the paper "Remarks on the analitic hierarchy process"". *Interfaces*, Vol 24, 6.
- Saaty T. [1994] "How to make a Decision: The analytic hierarchy process for decision in a complex world". RWS Publications, 3'd Edition, Pittsburgh, USA.
- Saaty T. [1995] "Decision making for leaders : The analytic hierarchy process for decision in a complex world". RWS Publications, 3'd Edition, Pittsburgh, USA.
- Saaty T. y Vargas L. [1984 a] "Inconsistences and Rank Preservation". *Journal of Mathematical Psychology*, Vol 28, 2.
- Saaty T. y Vargas L. [1984 b] "Comparisons of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios". *Journal of Mathematical Modeling*, Vol 5.
- Saaty [1983] "Conflict resolution and the falkland islan invasions". *Interfaces*, Vol 13,6
- Saaty, Vargas y Wendell [1983] "A feedback: assessing atritute weight by ratios". *Omega*, 11,1.
- Salo A y Hämäläinen R (1997) "On the measurement of preferences in the Analytic Hierarchy Process". *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 6.
- Shoner y Wedley [1989] "On a short-coming of Saaty's method of analytic hierachies". *Omega*,. Vol 11,3.
- Takeda [1987] "Estimating criterion weights using eigenvectors: a comparative study". *European Journal of Operational Research*. Vol 29.
- Vargas [1982] "Reciprocal matrices with random coefficients". *Mathematical modelling*. Vol3,1.
- Vargas L(1990) "An overview of the Analytic Hierarchy Process (AHP)". *European Journal of Operational Research*, 48.

- Watson y Freeling [1982] "A comment: assessing attribute weight". *Omega*, Vol 10,6.
- Watson y Freeling [1983] "A rejoinder: comment on assessing attribute weight by ratios". *Omega*, Vol 11,1
- Zahedi F. [1986] "The Analytic Hierarchy Process. A survey of the method and its applications". *Interfaces*, Vol 16.

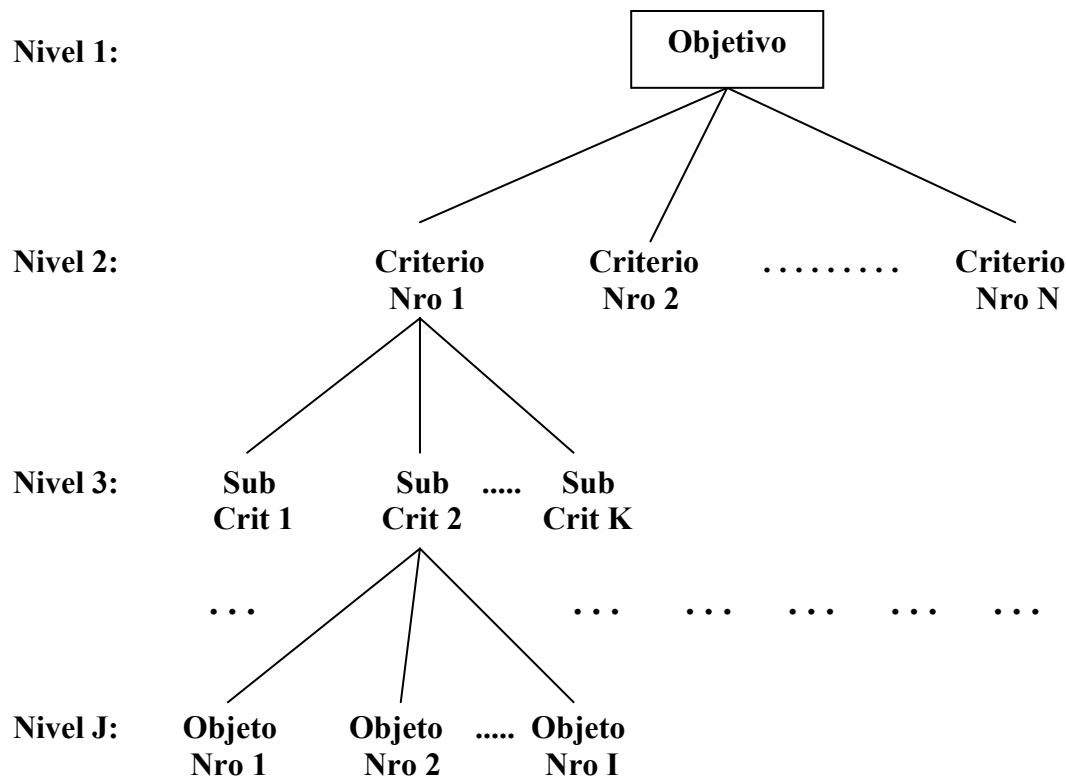
Referencias generales

- Barba Romero S y Pomerol J [1997] "Decisiones Multicriterio: Fundamentos Teóricos y Utilización Práctica". Col. de Economía. Universidad de Alcalá, España.
- Chalmers A (2002) "¿Qué es esa cosa llamada ciencia?". Siglo XXI Editora.
- Cook W, Kress M [1991] "A multiple criteria decision model with ordinal preference data". *European Journal of Operational Research*. Vol 54.
- Debreu G [1960] "Topological methods in cardinal utility theory". En "Mathematical methods in the social sciences", Arrow K, Karlin S, Suppes P, Ediciones Stanford University Press.
- Fishburn P [1970] "Utility for decision makings". *Publications in Operations Research*, Nro 18, Wiley, NY.
- Fishburn P [1974] "Lexicographic order, utilities and decision rules : A survey". *Management Sciences*, Vol 20, Nro 11.
- Gehrlein W [1983] "Condorcet's paradox". *Theory and Decision*, Vol 15.
- Jacquet-Lagrèze E [1990] "Interactive assessment of preferences using Holistic judgements : the PREFCALC Systems". En "Readings in multiple criteria decision making", Bana e Costa C.A. Edición 1990, Springer.
- Jacquet-Lagrèze E y Siskos J [1982] "Assessing a set of additive utility functions for multiple criteria decision making : The UTA Method". *European Journal of Operational Research*, Vol 10.
- Keeney R y Raiffa H [1976] "Decisions with multiple objectives : preferences and value tradeoffs". J Wiley.
- Pirlot M. y Vincke Ph. [1992] "Lexicographic agregation of semiorders". *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, Vol 1.
- Rietveld P, Ounwersloot H. [1992] "Ordinal data in multicriteria decision making, a stochastic dominance approach to siting nuclear power plants". *European Journal of Operational Research*, Vol 56, 2.
- Roy B [1985] "Méthodologie Multicritère d' Aide á la Decision". Economica, París.
- Shephard R. [1966] "Metric structures in ordinal data". *Journal of mathematical Psychology*, 3.
- Vansnick J. [1986] "On the problem of weights in multiple criteria decision making, the noncompensatory approach". *European Journal of Operational Research*, Vol 24.

ANEXO 1: Descripción del AHP

Como se señaló anteriormente, este método fue propuesto en forma completa en Saaty[1980]. Una de sus ventajas, sobre otras propuestas de la **DMD**, es que permite realizar una Jerarquía del proceso de decisión.

Dicha Jerarquía puede ser representada, siguiendo a Zahedi (1986), en el siguiente árbol de decisión:



La Figura anterior sugiere que en cada nivel de Jerarquía deben agruparse varios elementos. En el segundo nivel se discriminan los criterios fundamentales. En el tercero los sub-criterios correspondientes a cada criterio fundamental, y así sucesivamente. En el último nivel se especifican los elementos de decisión entre los que se debe seleccionar.

Durante el análisis el Decisor debe realizar comparaciones por parejas, entre los elementos que forman parte de un mismo nivel. En primer lugar se comparan entre sí, los criterios principales. Luego, a la luz de cada criterio fundamental se comparan entre sí los sub-criterios dependientes. Descendiendo por el árbol de Jerarquías, esta etapa del análisis culmina con las comparaciones apareadas de las diferentes alternativas de decisión, de acuerdo a cada uno de los subcriterios del nivel precedente.

Hay un aspecto muy interesante en la modalidad de asignación de pesos del AHP. Para comparar dos elementos **a** y **b**, donde es preferible el primero, la preferencia debe calificarse con las puntuaciones que se muestran en la siguiente Tabla (extraída de Saaty (1995)):

Intensidad de Importancia	Definición	Explicación
1	Igual	Dos actividades contribuyen de igual modo al objetivo.
3	Moderada	La experiencia y el juicio favorecen levemente a una actividad sobre la otra.
5	Fuerte	La experiencia y el juicio favorecen fuertemente a una actividad sobre la otra.
7	Muy fuerte o demostrada	Una actividad es mucho más favorecida que la otra, su predominancia se demostró en la práctica.
9	Extrema	Las pruebas que favorecen a una actividad más que a otra son del nivel de aceptación más alto posible.
2, 4, 6 y 8	Para transar entre los valores anteriores.	A veces es necesario interponer numéricamente un juicio de transacción puesto que no hay una palabra apropiada para describirlo.
Recíprocos de lo anterior	Si a la actividad <i>i</i> se le ha asignado uno de los números distintos de cero mencionados cuando se compara con la actividad <i>j</i> , entonces <i>j</i> tiene el recíproco cuando se la compara con <i>i</i> .	Una comparación que surge de la elección del elemento más pequeño como unidad, para estimar el mayor como múltiplo de esa unidad.
Racionales	Coeficientes que surgen de la escala	Si se forzara la consistencia obteniendo <i>n</i> valores numéricos para abarcar la matriz.
1.1 a 1.9	Para actividades vinculadas.	Cuando los elementos son cercanos y casi no se distinguen: moderado es 1.3 y extremo es 1.9.

Como consecuencia de estas comparaciones se obtiene para cada sub-criterio una matriz **A** como la que se muestra a continuación, donde se han comparado tres elementos: **a**, **b**, **c**:

		Con		
		a	b	c
comparando	a	1	3	1/2
	b	1/3	1	1/8
	c	2	8	1

Según la matriz, el elemento **c** es dos veces más importante que **a**, en tanto que el **a** es tres veces más importante que **b**.

Luego cada una de estas matrices puede ser condensada para obtener el peso de los elementos involucrados. En efecto, si se define el vector que contiene los ponderadores de cada elemento: w_i , como:

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$$

se verifica que:

$$A W = \rho W$$

Y por lo tanto ρ es el autovalor dominante de A , en tanto que W es su autovector asociado. Dicho de otro modo, Saaty sostiene que es el autovector dominante de cada matriz, el que resume los pesos de cada elemento.

Esta suposición está sólidamente fundamentada. En efecto, si los juicios aportados por el Decisor resultan transitivos, entonces cada puntuación puede entenderse como el cociente entre los pesos de los elementos comparados. Formalmente esto es:

$$a_{i,j} = w_i / w_j$$

y bajo esas condiciones se verifica que:

$$A W = \begin{vmatrix} w_1 / w_1 & w_1 / w_2 & \dots & w_1 / w_n \\ w_2 / w_1 & w_2 / w_2 & \dots & w_2 / w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1 / w_1 & w_1 / w_2 & \dots & w_1 / w_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{vmatrix} = n W$$

y por lo tanto el autovalor dominante es igual a la cantidad de elementos comparados.

En la realidad los juicios difícilmente son transitivos, por lo que la igualdad anterior no se cumple. De todos modos, como la matriz A es simétrica y definida positiva entonces existe un único autovalor y cumple la condición $\rho > n$.

La incongruencia entre los juicios puede denominarse inconsistencia. Una medida de las inconsistencias generales de la matriz está dada por:

$$CI = (\rho - n) / (n - 1)$$

Para expresar la inconsistencia en una escala estandar de 0 a 100, Saaty determinó por simulación las inconsistencias esperables en matrices de juicio construídas de modo totalmente aleatorio. Sea CIA la medida de una matriz de ese tipo, entonces la Razón de Inconsistencias es:

$$RI = CI / CIA$$

Si RI es menor al 10% la inconsistencia se considera aceptable. En cambio, si el Decisor no logra un RI adecuado (lo cual es esperable), debe revisar sus juicios. En la práctica esto lleva a un largo procesos de sucesivas correcciones.

ANEXO 2: Traducción de segmentos de Bana e Costa y Vansnick (2001)

Bana e Costa y Vansnick [2001] *“Une critique de base de l’approche de Saaty mise en question de la methode de la valeur propre maximales”*. Cahier du Lamsade. 175.

Nota: la tipografía intenta reproducir el original, en particular en el párrafo que dice “CONDICION FUNDAMENTAL DE MEDICION”

Objetivo del paper

De un proceso de cuantificación de una propiedad (que pueden poseer grados diversos, los elementos de un ensamble X a los propios de una persona J) los nombres que se le construyen conllevan una significación en términos de la propiedad estudiada. Esta significación depende seguro del tipo de escala a la cual el proceso de cuantificación refiere; así por ejemplo, si la escala obtenida es una escala ordinal, la comparación de dos nombres de la escala será significativa; si la escala obtenida es una escala de razón, el cociente de dos valoraciones de esta escala tendrá significación absoluta.

Como la construcción de la escala numérica se efectúa sobre la base de los juicios de J (generalmente formulada en respuesta a un cuestionamiento que es parte del proceso de cuantificación), nos parece esencial que la tecnología utilizada para obtener esta escala será tal que los enunciados que se puedan deducir estén conformes a los juicios de J (y también, más generalmente, a todo lo que resulte lógicamente de esos juicios). Así en el caso del procedimiento de Saaty, son dados cuatro elementos a, b, c y d con a más prioritario que b y c más que d, si resulta de los juicios de J que el razón de prioridad de a sobre b es más grande

que el razón de prioridad de c sobre d (por ejemplo, porque J declaró que a es fuertemente más prioritario que b y c es moderadamente más prioritario que d), ahora nos parece indispensable que la escala numérica $W:X \rightarrow \mathfrak{R}$ que Saaty construye para cuantificar la prioridad de estos elementos son tal que $w(a) / w(b) > w(c) / w(d)$. (notamos que como w es una escala de razón, este enunciado es significativo).

El objetivo de este paper es demostrar que una exigencia tal no es siempre respetada por el procedimiento de Saaty. En otros términos, vamos a demostrar que el método del valor propio máximo utilizado por Saaty para cuantificar la idea de prioridad no satisface necesariamente la siguiente condición:

CONDICIÓN FUNDAMENTAL DE MEDICIÓN (medida):

Para todos los elementos a, b, c y d de X, tales que a es más prioritario que b y c más prioritario que d; si resulta de las respuestas de J que el nombre de veces que a es más prioritario que b es más grande que el nombre de veces que c es más prioritario que d, entonces la escala numérica $W:X \rightarrow \mathfrak{R}$ cuantifica la prioridad de los elementos de X debe ser tal que

$$w(a) / w(b) > w(c) / w(d).$$

.....

Ejemplo 2 (caso de respuestas numéricas)

Siendo $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y suponiendo que las respuestas formuladas por J en comparaciones por parte de elementos de X son los siguientes:

- {x₁ , x₂ } x₁ es 2.5 veces más prioritario que x₂
- {x₁ , x₃ } x₁ es 4 veces más prioritario que x₃
- {x₁ , x₄ } x₁ es 9.5 veces más prioritario que x₄
- {x₂ , x₃ } x₂ es 3 veces más prioritario que x₃
- {x₁ , x₄ } x₂ es 6.5 veces más prioritario que x₄
- {x₃ , x₄ } x₃ es 5 veces más prioritario que x₄

Estas respuestas permiten formar la matriz positiva recíproca:

1	2.5	4	9.5
1/2.5	1	3	6.5
1/4	1/3	1	5
1/9.5	1/6.5	1/5	1

En la cual el vector propio normalizado correspondiente al valor propio máximo es:

- 0.533
- 0.287
- 0.139
- 0.041

En otros términos, teniendo en cuenta las respuestas formuladas por J, el método de Saaty atribuye a los elementos de X las prioridades:

$$\begin{aligned} w(X_1) &= 0.533 \\ w(X_2) &= 0.287 \\ w(X_3) &= 0.139 \\ w(X_4) &= 0.041 \end{aligned}$$

La tabla 3 presenta, para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ con $i < j$ una parte del valor numérico w_{ij} formulado por J concerniente a la prioridad de x_i sobre x_j y por otra parte, el valor de prioridad de $w(x_i)/w(x_j)$.

	W_{ij}	$W(X_i) / W(X_j)$
$\{X_1, X_2\}$	2.5	1.86
$\{X_1, X_3\}$	4	3.83
$\{X_1, X_4\}$	9.5	13
$\{X_2, X_3\}$	3	2.06
$\{X_2, X_4\}$	6.5	7
$\{X_3, X_4\}$	5	3.39

No es evidentemente sorprendente constatar que los valores $w(x_i)/w(x_j)$ no coinciden con los valores numéricos w_{ij} formulados por J (pues sus respuestas no son consistentes) pero esta incongruencia va más allá, dado que en algunos casos tampoco se respeta el orden de magnitud de las preferencias, a saber: para J X3 es cinco veces preferible a X4, en tanto que X1 es cuatro veces preferible a X3. De allí se deduce que la preferencia de X3 /X4 es de mayor intensidad que la de X1/X3. Sin embargo los coeficientes de Saaty indican otra cosa de acuerdo a la siguiente comparación:

$$3,39 = w(x_3)/w(x_4) < w(x_1)/w(x_3) = 3,83$$