

# Teoría del valor extremo como criterio de parada en la optimización heurística de bóvedas de hormigón estructural

Víctor Yepes

Instituto de Ciencia y Tecnología del  
Hormigón. ICITECH  
Dept. Ingeniería de la Construcción  
Universidad Politécnica de Valencia  
Camino de Vera, s/n  
46022 Valencia  
[vyepesp@cst.upv.es](mailto:vyepesp@cst.upv.es)

Alfonso Carbonell

Conselleria de Medio Ambiente,  
Agua, Urbanismo y Vivienda  
Generalitat Valenciana  
Avda. Blasco Ibáñez, 50  
46010 Valencia  
[carbonell\\_alf@gva.es](mailto:carbonell_alf@gva.es)

Fernando González-Vidoso

Instituto de Ciencia y Tecnología del  
Hormigón. ICITECH  
Dept. Ingeniería de la Construcción  
Universidad Politécnica de Valencia  
Camino de Vera, s/n  
46022 Valencia  
[fgonzale@cst.upv.es](mailto:fgonzale@cst.upv.es)

## Resumen

El artículo establece un criterio de parada para un algoritmo multiarranque de búsqueda exhaustiva de máximo gradiente basado en una codificación Gray aplicado a la optimización de bóvedas de hormigón. Para ello se ha comprobado que los óptimos locales encontrados constituyen valores extremos que ajustan a una función Weibull de tres parámetros, siendo el de posición,  $\gamma$ , una estimación del óptimo global que puede alcanzar el algoritmo. Se puede estimar un intervalo de confianza para  $\gamma$  ajustando una distribución Weibull a muestras de óptimos locales extraídas mediante una técnica *bootstrap* de los óptimos disponibles. El algoritmo multiarranque se detendrá cuando se acote el intervalo de confianza y la diferencia entre el menor coste encontrado y el teórico ajustado a dicha función Weibull.

## 1. Introducción

El proyecto de bóvedas de hormigón armado constituye un aspecto importante en la construcción de pasos inferiores para carreteras, ferrocarriles y obras hidráulicas. Su empleo está recomendado cuando la longitud de la estructura supera los 300 m y cuando la sobrecarga de tierras rebasa los 5 m. Los elementos característicos son la losa de cimentación, los hastiales laterales y la bóveda semicircular superior. El diseño actual de estas estructuras depende de la experiencia del proyectista; sin embargo, los métodos de optimización de estructuras ofrecen una alternativa objetiva al diseño tradicional.

Las técnicas de optimización exactas se limitan a problemas con pocas variables, puesto que el tiempo de cálculo crece exponencialmente con su número. Por ejemplo, Saribas y Erbatur [26] emplean la programación condicionada no lineal para minimizar el coste de un muro ménsula restringiendo el problema sólo a siete variables. Sarma y Adeli [27] aportan una extensa revisión de artículos sobre optimización económica de estructuras de hormigón.

Sin embargo, es posible utilizar técnicas aproximadas de optimización heurística, que proporcionen buenas soluciones en tiempos de cálculo razonables. Este grupo incluye procedimientos bioinspirados o basados en procesos físicos, tales como los algoritmos genéticos [12], la cristalización simulada [16], las colonias de hormigas [9] o las nubes de partículas [14], entre otros. La optimización heurística se ha manejado con éxito en áreas diferentes de la ingeniería estructural [31]. Cohn y Dinovitzer [6] tras revisar los métodos empleados en la optimización de estructuras advierten del vacío existente entre los estudios teóricos y las aplicaciones reales, indicando además que muchas publicaciones se han centrado en las estructuras de acero mientras que una fracción muy pequeña se ha ocupado del hormigón estructural.

Los primeros trabajos de optimización de hormigón estructural, aplicados a vigas, se remontan al año 1997 [1,5]. Gran parte de los trabajos posteriores han utilizado la programación evolutiva, y en especial los algoritmos genéticos. Kicinger et al. [15] aportan una revisión de la programación evolutiva y el diseño estructural. Recientemente, nuestro grupo de investigación ha

presentado trabajos con técnicas no evolutivas relacionados con la optimización de muros, marcos de carreteras, pórticos de edificación o pilas de puentes [17,21-24,30].

Como muchos de estos algoritmos obtienen un resultado distinto en cada ejecución –debido a que incluyen un gran número de decisiones aleatorias-, un problema añadido consiste en determinar las veces que el algoritmo se debería ejecutar para que la mejor solución obtenida tuviera una calidad suficiente. Además, sería de gran utilidad conocer lo alejada que se encuentra dicha solución del óptimo global del problema. Ello supone encontrar un criterio objetivo de parada para un algoritmo multiarranque que compatibilizase la calidad de la solución con el tiempo de cálculo necesario para su obtención.

Si se acepta que el óptimo local encontrado por un algoritmo de búsqueda estocástico puede considerarse como una solución extrema de una muestra aleatoria simple constituida por las soluciones visitadas, entonces se podría aplicar la teoría del valor extremo (Extreme Value Theory: EVT) para estimar el óptimo global del problema. El empleo de la EVT a los métodos heurísticos ya ha sido descrita en trabajos anteriores como en McRoberts [18], Golden et al. [13], y más recientemente, en Paya et al. [23].

Siguiendo esta línea de trabajo, el artículo se centra en la optimización económica de bóvedas empleadas como pasos inferiores en carreteras. Se describe una metodología que determina el número de veces que un algoritmo de búsqueda exhaustiva debe reiniciarse para que el mejor resultado obtenido no difiera más de un umbral predeterminado respecto al valor teórico obtenido mediante la EVT. Para ello, se ha desarrollado una aplicación que comprueba las secciones de la estructura, donde las dimensiones, los materiales y las armaduras de refuerzo son dadas de antemano y son variables discretas. Este módulo evalúa el coste de la solución y comprueba que se cumplen con las restricciones impuestas por todos los estados límite relevantes.

El artículo se organiza como sigue: en la sección 2 se describe el problema de optimización, en la sección 3 se analiza la aplicabilidad de la distribución de probabilidad de Weibull, los resultados se discuten en la sección 4, y por último, en la sección 5 se recogen las principales conclusiones.

## 2. Optimización del coste de las bóvedas

### 2.1. Definición del problema

El problema consiste en minimizar el coste de una bóveda de hormigón armado, representada por la función objetivo  $F$  de la expresión (1), de modo que satisfaga las restricciones formuladas en la expresión (2).

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1, r} p_i * m_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (2)$$

Obsérvese que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables de diseño cuya combinación es objeto de la optimización. La función objetivo es el coste de la bóveda por metro lineal (€/m) definido en la expresión (1), donde  $p_i$  son los precios unitarios recogidos en la Tabla 1, mientras que  $m_i$  son las mediciones de las unidades de obra necesarias para construir la bóveda. La expresión (2) representa las restricciones impuestas por las normas [4,19] para el proyecto de este tipo de estructuras de hormigón. Se remite al trabajo de Carbonell [3] para mayor detalle.

Tabla 1. Precios unitarios de la función de coste.

Unidad de obra	Coste (€)
Kg Acero B 500 S	1,000
m <sup>2</sup> Encofrado cimientos	9,015
m <sup>2</sup> Encofrado muros	12,621
m <sup>2</sup> Encofrado dintel	21,035
m <sup>3</sup> Cimbra	10,818
m <sup>3</sup> Colocación hormigón zapatas	3,606
m <sup>3</sup> Colocación hormigón hastiales	5,409
m <sup>3</sup> Colocación hormigón losa	4,508
m <sup>3</sup> Bomba para colocación hormigón	4,808
m <sup>3</sup> Hormigón HA-25	43,724
m <sup>3</sup> Hormigón HA-30	46,579
m <sup>3</sup> Hormigón HA-35	49,434
m <sup>3</sup> Hormigón HA-40	52,289
m <sup>3</sup> Hormigón HA-45	55,144
m <sup>3</sup> Hormigón HA-50	57,999
m <sup>3</sup> Excavación tierras	3,010
m <sup>3</sup> Relleno tierras	4,810

Se han considerado 45 variables de diseño. Se incluyen 5 variables geométricas, diferentes tipos de hormigón para bóveda, solera y hastiales, la modulación de armado de dos planos consecutivos

paralelos a la sección transversal, 4 modulaciones de armadura de cortante y 32 variables asociadas a la longitud y disposición de las armaduras (ver Figura 1). Además, se han utilizado 26 variables dependientes que permiten, por ejemplo, aprovechar la geometría del problema. La Tabla 2 resume los parámetros empleados.

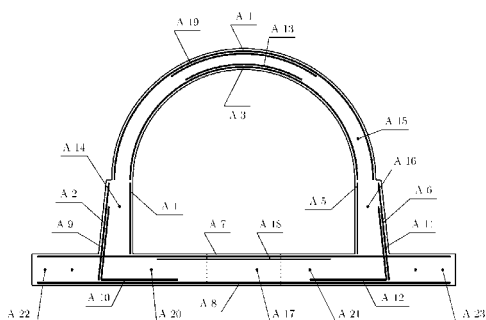


Figura 1. Disposición de armaduras en la bóveda.

Todas las variables son discretas. Así, por ejemplo, los espesores de los elementos varían en escalones de 5 cm; la resistencia a compresión de los hormigones varían en escalones de 5 MPa, los diámetros de las armaduras siguen la serie de la EHE [19] que discurre desde los 6 mm hasta los 40 mm, añadiendo un grupo compuesto por dos barras de 32 mm. Las variables se han representado con 175 bits de código binario, lo que representa un número desorbitado de posibles soluciones, debido a la explosión combinatoria generada, que es del orden de  $1,34 \cdot 10^{44}$ .

Tabla 2. Parámetros geométricos y de acciones.

Parámetro	Valor
Luz libre horizontal	12,40 m
Altura vertical de los hastiales	3,00 m
Cobertura de tierras	1,00 m
Peso específico del relleno	20 kN/m <sup>3</sup>
Rozamiento interno del relleno	30°
Coefficiente de balasto del suelo	10 MN/m <sup>3</sup>
Sobrecarga distribuida	4 kN/m <sup>2</sup>
Vehículo pesado	600 kN
Flecha límite del vano	1/250
Coefficiente seguridad cargas	1,6
Coefficiente seguridad hormigón	1,5
Coefficiente seguridad acero	1,15
Clase específica de exposición ambiental EHE	IIa

En este trabajo se aceptan soluciones que incumplan las condiciones impuestas por los estados límite, pero penalizándolas en su coste. Ello significa aceptar como factibles todas las soluciones durante el proceso de búsqueda con la esperanza que un óptimo local de calidad habrá anulado las penalizaciones en las fases finales de la optimización, y por tanto satisfará todas las restricciones. La penalización que se ha utilizado es la siguiente:

$$F^+ = F + \sum \Phi_j P \quad (3)$$

donde  $F^+$  representa la función penalizada,  $F$  es el coste,  $\Phi_j$  es el porcentaje de incumplimiento para un estado límite y  $P_j$  es la penalización empleada.

## 2.2. Búsqueda exhaustiva de máximo gradiente

El algoritmo empleado en este estudio es un método de búsqueda exhaustiva de máximo gradiente (Global Best: GB), utilizado en la tesis de Carbonell [3]. Este método genera una solución inicial dando valores aleatorios a las variables del problema y posteriormente se mejora mediante una búsqueda local por entornos hasta alcanzar un óptimo local. Este proceso se repite en múltiples ocasiones hasta cumplir con un criterio de parada, eligiéndose el óptimo local alcanzado que presente una mejor valoración de su función objetivo. Se denomina *entorno* al conjunto de soluciones a las que se puede llegar aplicando un movimiento desde una solución dada. GB explora exhaustivamente todo el entorno y reemplaza la solución actual por la de menor coste del vecindario. El proceso de búsqueda se detiene cuando las soluciones del entorno no pueden mejorar la solución actual. Este procedimiento es determinístico, pues partiendo desde una solución inicial dada, se llega al mismo óptimo local. El proceso de búsqueda se puede reiniciar desde soluciones de partida aleatorias, eligiéndose el óptimo local de menor coste. La trayectoria de búsqueda no descarta ninguna solución, puesto que si ésta incumpliera las restricciones impuestas, se procedería a penalizarla.

El valor de cada variable se transforma en un número entero dividiéndolo por un múltiplo, que luego se transforma en código binario. Ello permite definir una cadena de 175 bits, que representa todos los valores posibles de las 45

variables, reconociendo el algoritmo los valores máximos y mínimos para cada una de ellas.

Sin embargo, la codificación binaria no es homogénea respecto a su equivalente en base decimal. Por ejemplo, al número 7 le sigue el 8 con un solo cambio de dígito, pero sus correspondientes en código binario, 0111 y 1000, necesitan cuatro cambios de dígito para pasar de uno al otro. Este es un problema bien conocido de la codificación binaria que se conoce como *risco de Hamming (Hamming Cliff)*. Para evitarlo, se ha utilizado la codificación Gray estándar [2], que permite el paso de un número al siguiente mediante un solo cambio de dígito. Esto permite una representación alternativa en la que la adyacencia existente en el espacio de búsqueda se pueda mantener en el espacio que lo representa. La búsqueda exhaustiva consistirá, por tanto, en explorar todas las soluciones que difieran un solo dígito binario, en código Gray, respecto a la actual, para posteriormente adoptar el mejor de ellos. El proceso continúa iterando hasta que llega a un óptimo local, con el cual finaliza el algoritmo. Es un movimiento genérico, sencillo, rápido y que, además, no precisa calibración.

### 3. La función de distribución de Weibull

La función de distribución de Weibull puede expresarse como:

$$F_x(x_0) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x_0 - \gamma}{\eta}\right)^\beta\right\}, & x_0 > \gamma \\ 0, & x_0 \leq \gamma \end{cases} \quad (3)$$

con

$$\eta, \beta > 0 \quad (4)$$

donde  $\gamma$  es el parámetro de posición,  $\eta$  es el parámetro de escala y  $\beta$  es el parámetro de forma.

Esta expresión, fue desarrollada por Weibull [29] para describir el comportamiento tensional de los materiales. La función pertenece a la familia de distribuciones de valores extremos. Fisher y Tippett [11] demostraron que si se extraen muestras de tamaño  $m$  de una población cuyo valor extremo es  $\gamma$ , conforme crece el valor de  $m$ , la distribución formada por los valores extremos de dichas muestras tienden a una distribución Weibull de tres parámetros, donde  $\gamma$  es el parámetro de posición de la función.

La aplicación de esta función al problema presentado se basa en que el óptimo local alcanzado por el algoritmo constituye un mínimo respecto a un amplio conjunto de soluciones consideradas durante el proceso de búsqueda. La población de soluciones del problema de optimización considerado es extraordinariamente alto, pero finito, por lo que se asume que el espacio discreto de soluciones se aproxima suficientemente bien a esta distribución continua. Si es posible ajustar el conjunto de óptimos locales obtenidos mediante la heurística GB a una distribución Weibull, entonces el parámetro  $\gamma$  puede estimar el óptimo global del problema. Para ello, se va a utilizar una metodología similar a la propuesta por nuestro grupo de investigación a la optimización de pórticos de edificación con cristalización simulada [23].

## 4. Resultados y discusión

El algoritmo se ha codificado en FORTRAN 77, con un ordenador personal con procesador Intel I7 de 2,94 GHz y 3 Gbyte de RAM. Con este equipo, las 10.492 iteraciones, que de media, necesita el algoritmo GB, tardan 11,54 segundos en ejecutarse.

### 4.1. Descripción estadística de los resultados

La Figura 2 muestra el histograma obtenido para los 3000 óptimos locales encontrados con el algoritmo GB.

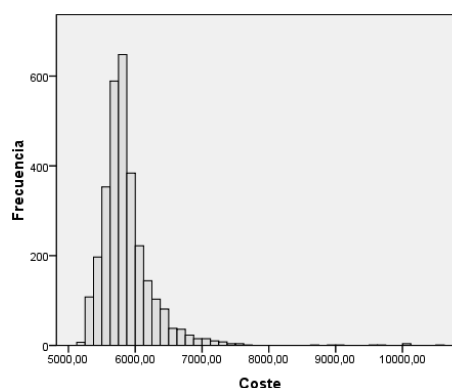


Figura 2. Histograma de 3000 óptimos locales obtenidos mediante el algoritmo GB.

La descripción estadística de la muestra es la siguiente: los valores mínimos y máximos son 5182,13€ y 10502,04€, respectivamente; la media muestral vale 5866,59€, con un intervalo de confianza de  $\pm 14,55\%$ ; la mediana vale 5793,23€. La distribución es leptocúrtica (coeficiente de curtosis de 28,06) y asimétrica positiva (coeficiente de asimetría de 3,64). El percentil del 5% presenta un coste de 5398,64€.

#### 4.2. Ajuste de la distribución Weibull

Para comprobar la hipótesis de que la muestra de 3000 resultados obtenidos por la heurística GB se ajusta a una distribución Weibull de tres parámetros, se debe verificar, en primer lugar, que no existen razones para rechazar la hipótesis nula de que el histograma se corresponde con dicha distribución; en segundo lugar, se debe comprobar que las 3000 soluciones de mínimo coste encontradas por el algoritmo GB son independientes (ver Fisher y Tippet [14]); por último, el coeficiente de correlación del ajuste de los 3000 resultados a la distribución debe ser suficientemente alto.

Para comprobar el ajuste a una distribución dada se pueden emplear pruebas no paramétricas como las de Kolmogorov-Smirnov y la de  $\chi^2$  de Pearson (ver, por ejemplo, Conover [7]), siempre que se asuma la independencia del muestreo. Se verifica que ambos estadísticos se encuentran muy por debajo del valor crítico correspondiente a un nivel de significación del 0,05. Por tanto, no existe razón para rechazar la hipótesis de pertenencia de la muestra a la distribución de Weibull.

Uno de los supuestos subyacentes en la teoría del valor extremo es la independencia de cada una de las muestras, es decir, que cada una de las soluciones obtenidas por el algoritmo GB debe ser independiente de las restantes. Este supuesto se basa en que el proceso de búsqueda del algoritmo GB se inicia desde una solución aleatoria. Para confirmar la independencia se ha empleado el contraste de rachas de Wald-Wolfowitz a las 3000 soluciones obtenidas siguiendo el orden en que aparecieron (ver, por ejemplo, Conover [7]). En nuestro caso, existen 1500 rachas respecto a la mediana siendo la significación bilateral de 0,661, lo cual no permite rechazar la hipótesis nula de que los resultados no sean independientes. Los datos, pues, proceden de una muestra aleatoria.

Por último, se deben calcular los parámetros que mejor ajusten con la muestra. Pueden utilizarse distintos métodos de estimación como el de los momentos, el de máxima verosimilitud, de mínimos cuadrados, etc. (ver Dannenbring [8], Golden et al. [13], Vasko y Wilson [28]). En este trabajo se ha utilizado el software de ReliaSoft's Weibull++7 [25]. Se han empleado tanto los métodos de máxima verosimilitud como el de regresión en  $Y$  (de acuerdo con el principio de mínimos cuadrados, que minimiza la distancia vertical entre los datos y la función de densidad de probabilidad), dando ambas estimaciones el valor de  $\gamma = 5140,31\%$  para el parámetro de posición. Esta magnitud constituye la estimación que la teoría del valor extremo proporciona para el óptimo global del problema en el caso de utilizar la heurística GB. El resto de parámetros obtenidos para la regresión en  $Y$  son  $\eta = 809,3024$  y  $\beta = 2,4878$ . El coeficiente de correlación del ajuste es  $\rho = 0,9798$ , que es bastante alto para los resultados numéricos. La diferencia entre el mínimo coste obtenido por las 3000 ejecuciones y el parámetro estimado es de 41,82€, apenas una diferencia del 0,81% respecto al valor teórico. Desde el punto de vista del ingeniero estructural, la diferencia detectada es suficientemente pequeña para aceptar el óptimo local encontrado por el algoritmo GB propuesto.

#### 4.3. Determinación del número de ejecuciones

El número de ejecuciones del algoritmo GB tendría que asegurar que la diferencia entre el mínimo valor encontrado y el estimado por la distribución de probabilidad es inferior a un umbral previo. Sin embargo, la estimación del parámetro  $\gamma$  está sujeta a variabilidad, pues depende de la muestra empleada. Para obtener un intervalo de confianza para el parámetro  $\gamma$ , se utiliza la metodología propuesta por Paya et al. [23]. Del conjunto de 3000 soluciones se extraen 9 muestras con reemplazamiento de tamaño 10, 25, 50, 100, 250, 500, 1000 y 3000. En cada muestra se determina el valor de coste mínimo,  $C_{\min}$ , y se estima el parámetro  $\gamma$  de la distribución de Weibull correspondiente. En la Figura 3 se ha representado, el coste mínimo ( $C_{\min}$ ) y los valores máximo ( $\gamma_{\max}$ ) y mínimo ( $\gamma_{\min}$ ) del parámetro de posición de las 9 muestras extraídas de un tamaño determinado.

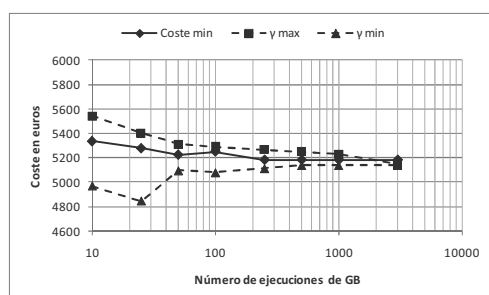


Figura 3. Coste mínimo y parámetros de posición estimados para 9 muestras extraídas con reemplazamiento.

En la Tabla 3 se comprueba que la variabilidad del parámetro de posición se puede estimar mediante la diferencia entre  $\gamma_{\max}$  y  $\gamma_{\min}$ . Este rango baja con el número de ejecuciones, así la diferencia relativa respecto a  $\gamma_{\min}$  pasa del 11,555% para 10 ejecuciones, hasta un 0,112% en el caso de 3000. Este descenso también se observa cuando se analiza la diferencia relativa entre el coste mínimo y el parámetro  $\gamma_{\min}$  estimado, disminuyendo del 7,355% al 0,814% cuando las ejecuciones suben de 10 a 3000, respectivamente. También se advierte que, si bien la diferencia entre  $\gamma_{\max}$  y  $\gamma_{\min}$  baja consecutivamente, la divergencia entre  $C_{\min}$  y  $\gamma_{\min}$  se estabiliza a partir de las 500 ejecuciones.

Tabla 3. Coste mínimo y parámetros estimados para 9 muestras mediante extracción con reemplazamiento del conjunto de 3000 ejecuciones.

Ejecuciones	$C_{\min}$	$\gamma_{\max}$	$\gamma_{\min}$
10	5334,53	5543,26	4969,06
25	5276,61	5403,42	4844,50
50	5224,27	5311,10	5095,47
100	5250,45	5292,67	5079,67
250	5182,13	5267,62	5114,40
500	5182,13	5251,81	5140,31
1000	5182,13	5230,47	5140,31
3000	5182,13	5146,06	5140,31

Como el número de óptimos locales conocidos depende de las ejecuciones realizadas, se puede aplicar la técnica *bootstrap* para estimar los parámetros [10]. Esta técnica se basa en tratar una muestra aleatoria de  $n$  observaciones como si se tratara de toda la población, de la cual se extraen nuevas muestras utilizando el reemplazamiento de

los individuos seleccionados. Este método se ha empleado con éxito en problemas que serían complicados de resolver mediante herramientas estadísticas tradicionales o en situaciones donde las técnicas clásicas no son aplicables [32].

Se ha repetido la estimación de la variabilidad del parámetro de posición mediante 9 muestras obtenidas mediante la selección aleatoria con reemplazamiento de entre el conjunto de óptimos locales encontrados. En la Figura 4 se ha representado la evolución del coste mínimo y de los parámetros  $\gamma_{\max}$  y  $\gamma_{\min}$  correspondientes a las 9 muestras extraídas mediante *bootstrap* para 10, 25, 50, 100, 250, 1000 y 3000 ejecuciones.

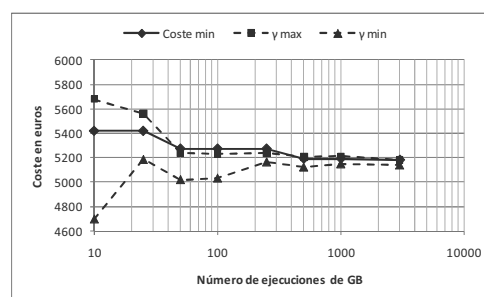


Figura 4. Coste mínimo y parámetros de posición estimados mediante *bootstrap* para 9 muestras.

La diferencia relativa entre  $\gamma_{\max}$  y  $\gamma_{\min}$  también baja con el número de ejecuciones, pasando del 20,909% en el caso de 10, al 0,812% en el caso de 3000. En cuanto a la diferencia relativa entre el coste mínimo y el parámetro  $\gamma_{\min}$  estimado, se rebaja del 15,361% al 0,814%, cuando se pasa de 10 a 3000 ejecuciones del algoritmo GB. Aquí el salto entre  $C_{\min}$  y  $\gamma_{\min}$  se estabiliza a partir de las 1000 ejecuciones (ver Tabla 4).

Tabla 4. Coste mínimo y parámetros estimados mediante *bootstrap* para 9 muestras.

Ejecuciones	$C_{\min}$	$\gamma_{\max}$	$\gamma_{\min}$
10	5419,74	5680,38	4698,08
25	5419,74	5563,70	5185,85
50	5274,11	5240,77	5020,40
100	5274,11	5231,37	5033,59
250	5274,11	5240,77	5165,44
500	5192,19	5207,95	5124,31
1000	5192,19	5211,00	5150,27
3000	5182,13	5182,03	5140,31

Con ello se establece un criterio de parada objetivo para un algoritmo multiarranque basado en la búsqueda local GB. En efecto, partiendo desde una solución aleatoria, se aplica una búsqueda local hasta alcanzar un coste mínimo. Con distintos arranques se obtiene una muestra de óptimos locales que permiten, mediante *bootstrap*, extraer 9 muestras para determinar la diferencia entre el mínimo coste alcanzado hasta ese momento y el mínimo teórico estimado mediante una distribución Weibull, además de la diferencia entre el valor máximo y mínimo de los parámetros  $\gamma$  estimados. El algoritmo multiarranque se detendrá cuando tanto la diferencia entre el mínimo localizado y el teórico como la variabilidad de los parámetros de posición no superen determinada cota. En nuestro caso, si se establece que es suficiente que la variabilidad en la determinación del parámetro de posición  $\gamma$  sea inferior al 2% y que la diferencia entre el coste mínimo alcanzado y el teórico sea inferior al 1%, interpolando en la Tabla 3, hubieran sido necesarias 682 ejecuciones.

El menor coste encontrado, de 5182,13 € por metro lineal de bóveda, es un 5,7% inferior al coste de la bóveda diseñada en 2002 por el tercer autor para la autovía Valle Romano en Málaga siguiendo los procedimientos habituales de cálculo de una oficina de proyectos experimentada y aplicando los mismos precios utilizados en la Tabla 2.

En definitiva, el método propuesto es válido siempre que los óptimos locales obtenidos en cada ejecución del algoritmo multiarranque sean independientes y no se rechace la hipótesis de pertenencia de dicha muestra a la distribución de Weibull. Estos supuestos se han comprobado para otras estructuras de hormigón armado [23].

## 5. Conclusiones

Los óptimos locales encontrados por una heurística exhaustiva de máximo gradiente (GB) basada en una codificación Gray para optimizar el coste de bóvedas de hormigón constituyen valores extremos que conforman una muestra aleatoria simple que ajusta a una distribución Weibull de tres parámetros, siendo el de situación  $\gamma$  una estimación del óptimo global al que podría llegar dicho algoritmo. El trabajo comprueba el siguiente criterio de parada objetivo para un algoritmo

multiarranque basado en GB: que tanto la diferencia entre el mínimo coste encontrado y el parámetro  $\gamma$ , así como el intervalo de confianza para dicho parámetro estén acotados, por ejemplo, a un 2% y a un 1%, respectivamente. Para la bóveda estudiada, la estimación de los parámetros se realiza sobre 9 muestras extraídas mediante la técnica *bootstrap*. El coste mínimo alcanzado es un 5,7% inferior al de una bóveda real diseñada siguiendo los procedimientos habituales de una oficina de proyectos experimentada. Además, este criterio de parada puede aplicarse a algoritmos estocásticos multiarranque, siempre que se compruebe la independencia estadística de la muestra de óptimos locales y su pertenencia y buen ajuste a una distribución de Weibull.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo económico proporcionado por la Universidad Politécnica de Valencia (Proyecto de Investigación PAID-06-09) y de la Generalitat Valenciana (Proyecto de Investigación GV/2010/086).

## Referencias

- [1] Balling, R.J.; Yao, X. Optimization of reinforced concrete frames. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 123(2):193-202, 1997.
- [2] Bitner, J.R.; Ehrlich, G.; Reingold, E.M. Efficient generation of the binary reflected Gray code and its applications. *Communications of the ACM*, 19(9):517-521, 1976.
- [3] Carbonell, A. Optimización heurística de bóvedas de paso de hormigón armado. Tesis doctoral. Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Universidad Politécnica de Valencia, 2009.
- [4] CEN Eurocode 2. Design of Concrete Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings. Brussels, CEN, 1991.
- [5] Coello, C.A.; Christiansen, A.D.; Santos, F. A simple genetic algorithm for the design of reinforced concrete beams. *Engineering with Computers*, 13:185-196, 1997.
- [6] Cohn, M.Z.; Dinovitzer, A.S. Application of structural optimization. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 120(2):617-649, 1994.

- [7] Conover, W.J. Practical nonparametric statistics. Willey, New York, 1971.
- [8] Dannenbring, D.G. Procedures for estimating optimal solution values for large combinatorial problems. *Management Science*, 23(12):1273-1283, 1977.
- [9] Dorigo, M.; Maniezzo, V.; Colomi, A. The ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, 26(1):29-41, 1996.
- [10] Efron, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1):1-26, 1979.
- [11] Fisher, R.A.; Tippett, L.H.C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24:180-190, 1928.
- [12] Goldberg, D.E. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning, Addison-Wesley, New York, 1989.
- [13] Golden, B.L.; Alt, F.B. Interval estimation of a global optimum for large combinatorial problems. *Naval Research Logistics Quarterly*, 26(1):69-77, 1979.
- [14] Kennedy, J.; Eberhart, R. Particle swarm optimization. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. IV: 1942-1948, 1995.
- [15] Kicinger, R.; Arciszewski, T.; de Jong, K. Evolutionary computation and structural design: A survey of the state-of-the-art. *Computers & Structures*, 83:1943-1978, 2005.
- [16] Kirkpatrick, S.; Gelatt, C.D.; Vecchi, M.P. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671-680, 1983.
- [17] Martinez, F.J.; Gonzalez-Vidosa, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. Heuristic optimization of RC bridge piers with rectangular hollow sections. *Computers & Structures*, 88(5-6):375-386, 2010.
- [18] McRoberts, K. A search model for evaluating combinatorially explosive problems. *Operations Research*, 19(6):1331-1349, 1971.
- [19] Ministerio de Fomento. Instrucción de Hormigón Estructural EHE, Madrid, 2008.
- [20] Ministerio de Fomento. Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carreteras IAP-98, Madrid, 1998.
- [21] Paya, I.; Yepes, V.; Gonzalez-Vidosa, F.; Hospitaler, A. Multiobjective optimization of reinforced concrete building frames by simulated annealing. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 23(8):596-610, 2008.
- [22] Paya-Zaforteza, I.; Yepes, V.; Hospitaler, A.; Gonzalez-Vidosa, F. CO<sub>2</sub>-efficient design of reinforced concrete building frames. *Engineering Structures*, 31(7):1501-1508, 2009.
- [23] Paya-Zaforteza, I.; Yepes, V.; Gonzalez-Vidosa, F.; Hospitaler, A. On the Weibull cost estimation of building frames designed by simulated annealing. *Meccanica*, DOI 10.1007/s11012-010-9285-0.
- [24] Perea, C.; Alcala, J.; Yepes, V.; Gonzalez-Vidosa, F.; Hospitaler, A. Design of reinforced concrete bridge frames by heuristic optimization. *Advances in Engineering Software*, 39(8):676-688, 2008.
- [25] ReliaSoft. Weibull++7 user's guide. Reliasoft, Tucson, 2007.
- [26] Saribas, A.; Erbatur, F. Optimization and sensitivity of retaining structures. *ASCE Journal of Geotechnical Engineering*, 122(8):649-656, 1996.
- [27] Sarma, K.C.; Adeli, H. Cost optimization of concrete structures. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 124(5):570-578, 1998.
- [28] Vasko, F.J.; Wilson, J.R. An efficient heuristic for large set covering problems. *Naval Research Logistics Quarterly*, 31(1):163-171, 1984.
- [29] Weibull, W. A statistical distribution of wide applicability. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18(3):293-297, 1951.
- [30] Yepes, V.; Alcala, J.; Perea, C.; Gonzalez-Vidosa, F. A parametric study of optimum earth retaining walls by simulated annealing. *Engineering Structures*, 30(3):821-830, 2008.
- [31] Yepes, V.; Medina, J.R. Economic heuristic optimization for the heterogeneous fleet VRPHESTW. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, 132(4):303-311, 2006.
- [32] Zoubir, A.M.; Boashash, B. The bootstrap and its application in signal processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 15(1):56-67, 1998.