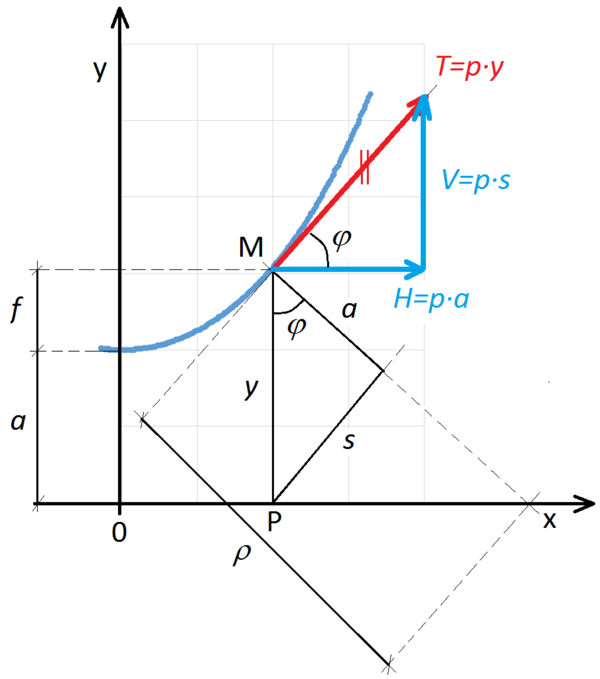
PROPIEDADES DE LA CATENARIA

Procedimientos de construcción. Prof. Víctor Yepes

Veamos algunas propiedades de la catenaria de interés para la resolución de problemas. La figura siguiente permite visualizarlas.



1. La componente horizontal de la tensión $\vec{T}$ es constante y vale $\boxed{H = p \cdot a}$

En efecto,

$$T \cdot \frac{dx}{ds} = T \cdot \cos\varphi = H = p \cdot a$$

2. La componente vertical de la tensión $\vec{T}$ vale $\boxed{V = p \cdot s}$

Se puede deducir la propiedad de la siguiente forma,

$$T \cdot \frac{dy}{ds} = T \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = T = p \cdot s$$

3. La proyección de la ordenada de un punto sobre su normal es constante y vale el parámetro a, es decir, $\boxed{y \cdot \cos\varphi = a}$

Efectivamente,

$$y \cdot \cos\varphi = y \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan\varphi)^2}} = y \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} = y \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sinh\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$= a \cdot \cosh\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{\cosh\frac{x}{a}} = a$$

4. La proyección de la ordenada de un punto respecto su tangente es igual a *s*, longitud del cable desde el origen al punto, es decir, $\boxed{y \cdot \sin\varphi = s}$

Comprobémoslo,

$$y \cdot \sin\varphi = y \cdot \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+(\tan\varphi)^2}} = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{x}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} = a \cdot y' = a \cdot \frac{s}{a} = s$$

5. El radio de curvatura en un punto es $\boxed{\rho = \frac{y}{\cos\varphi}}$

En efecto,

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

Además,

$$y' = \tan\varphi = \frac{s}{a}$$

Diferenciando la última expresión,

$$d(\tan\varphi) = \frac{1}{a} ds$$

Y por tanto,

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = a \cdot \frac{d(\tan\varphi)}{d\varphi} = a \cdot \frac{1}{(\cos\varphi)^2}$$

Sustituyendo el valor de *a*,

$$\rho = \frac{y \cdot \cos\varphi}{(\cos\varphi)^2} = \frac{y}{\cos\varphi}$$

6. El valor de $\vec{T}$ en un punto cualquiera vale $\boxed{T = p \cdot y = H + p \cdot f}$

En efecto, si llamamos *f* a la flecha o diferencia de ordenadas entre el punto en cuestión y el más bajo, entonces

$$T = p \cdot \sqrt{a^2 + s^2} = p \cdot \sqrt{a^2 + a^2 \cdot y'^2} = p \cdot a \cdot \sqrt{1 + \left(\sinh\frac{x}{a}\right)^2} = p \cdot a \cdot \cosh\frac{x}{a} = p \cdot y$$

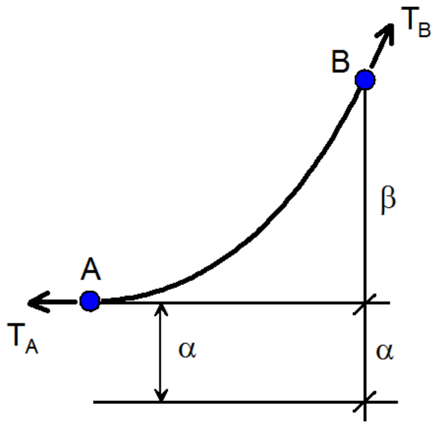
Además, como $y = a + f$, entonces

$$T = p \cdot (a + f) = p \cdot a + p \cdot f = H + p \cdot f$$

7. Todas las catenarias son semejantes, siendo la relación de semejanza la de sus parámetros.

8. Como corolario de la propiedad (6) de la catenaria, tenemos $\boxed{T_B = T_A + p \cdot \beta}$

En efecto, según se puede observar en la siguiente figura,



$$T_A = H + p \cdot \alpha$$

$$T_B = H + p \cdot (\alpha + \beta) = H + p \cdot \alpha + p \cdot \beta$$

Restando ambas expresiones, queda

$$T_B - T_A = p \cdot \beta \rightarrow T_B = T_A + p \cdot \beta$$